

# Gravitation und Krümmung der Raum-Zeit - Teil 2



# Einsteinsche Gravitationsfeldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik}$$

## Krümmung der Raumzeit = universelle Konstante x Energie- und Impulsdichte

Die Raumzeit wirkt auf die Masse (Energie), indem sie ihr sagt, wie sie sich bewegen soll; die Masse (Energie) wirkt umgekehrt auf die Raumzeit, indem sie ihr sagt, wie sie sich krümmen soll.

**Eine Gleichung ist dann erfüllt, wenn die rechte und die linke Seite identisch ist.**

**Gegeben:** Masse- (Energie) und Impulsverteilung in einem Raumgebiet

**Lösung:** Krümmung der Raum-Zeit in diesem Raumgebiet

Die Lösung wird gewöhnlich in Form einer Metrik angegeben, d.h. man berechnet die Größe der einzelnen Komponenten des metrischen Tensors  $g$ . Der metrische Tensor bestimmt das Linienelement  $ds$  (die Metrik) in diesem Raumbereich. Deshalb wird gewöhnlich die Metrik, welche die Einsteinschen Feldgleichungen für eine gegebene Masseverteilung genügt, als Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.

# Lösungen der Feldgleichungen und ihre Implikationen

Die Einsteinschen Feldgleichungen, die zu einer „Geometrisierung“ der Schwerkraft führen (als semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik), sind nicht abgeleitet, sondern postuliert worden. Sie haben bis heute allen empirischen Tests standgehalten.

**Kosmologische Lösungen: Beschreiben die kosmische Raumzeit „im Großen“**

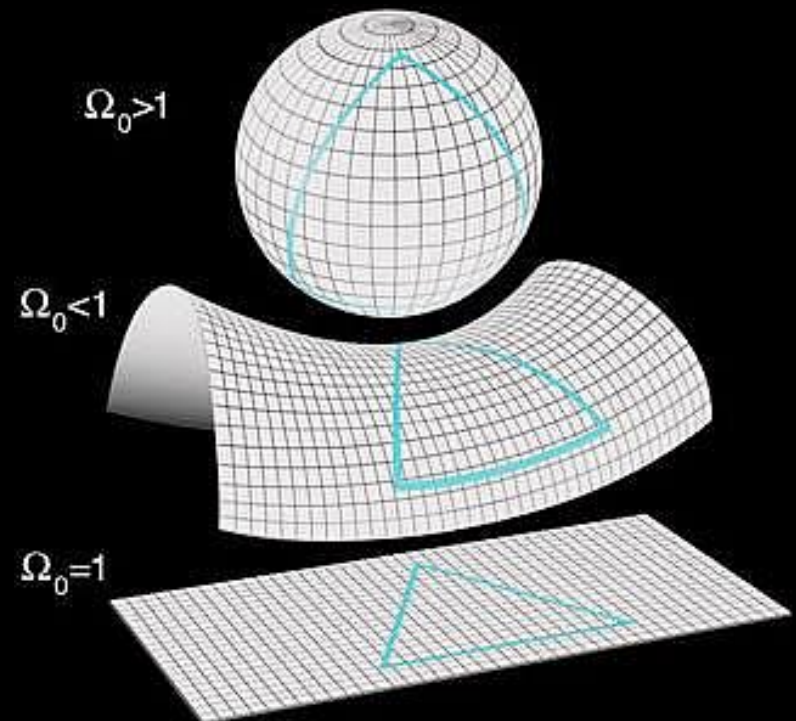
→ Friedman-Lösung

Robertson-Walker-Metrik

- $k = +1$ : positive Krümmung
- $k = 0$ : keine Krümmung, flacher Raum
- $k = -1$ : negative Krümmung

Vorhersage der kosmischen Expansion

Entdeckung der kosmischen Expansion  
durch Edwin Hubble



## Spezielle Vakuumlösungen: de Sitter-Lösung

Abwesenheit von Materie (Energiedichte ist überall Null)

Die Raumkrümmung wird allein durch die kosmologische Konstante  $\Lambda$  verursacht. Ist als kosmologisches Modell nicht geeignet, da es das Machsche Prinzip nicht zu erfüllen mag.

positives  $\Lambda$ : de Sitter-Raum  
negatives  $\Lambda$ : Anti – de Sitter-Raum



Hat eine große Bedeutung  
in der Quantengravitation

Beobachter hat den Eindruck, immer am „Boden“ eines Gravitationspotentials zu stehen  
Einen Körper, den man wegschleudert, kehrt immer wie ein Bumerang zurück (auch Licht)  
Die Rückkehrzeit ist von der Wurfgeschwindigkeit unabhängig (d.h. für alle „Würfe“ gleich)

→ Spezielle Eigenschaften von Anti- de Sitter-Räumen machen sie prädestiniert für  
Quantengravitationstheorien (z.B. Randall-Sundrum-Modell)

## Lösungen für das „Innere“ und das „Äußere“ eines Sterns: Schwarzschild-Lösung

### a) Äußere Schwarzschildlösung: Vakuumlösung für den sphärisch-symmetrischen Fall

- Erste exakte Lösung der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen (1916)
- Grundlegend für die Physik nichtrotierender, ungeladener Schwarzer Löcher
- Beschreibt den Raum außerhalb einer Masse (z.B. eines Sterns)

### b) Innere Schwarzschildlösung: Lösung für das Innere einer homogene Flüssigkeitskugel

- Bedingung: keine Rotation, keine Ladung
- einfachstes allgemein-relativistisches Modell für das Gravitationsfeld im Inneren eines Sterns
- Äußere und innere Schwarzschildlösung „passen“ zusammen...

### Karl Schwarzschild (1873 – 1916)

Hat viele grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der entstehenden Astrophysik veröffentlicht:

Schwarzschild-Exponent / Konvektion im Sterninneren  
Randverdunklung der Sonnenscheibe / geometrische  
Optik – Schwarzschild-Spiegel



# Schwarzschild-Metrik

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

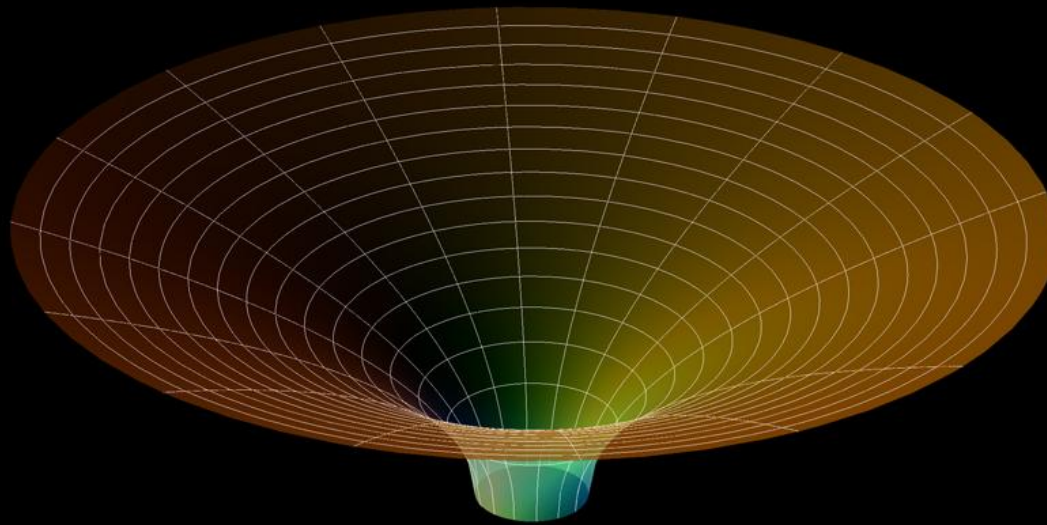
In r-Richtung gibt es bei  $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$  eine kugelförmige Hyperfläche, die

Ereignisse im „Inneren“ von Ereignissen im „Äußeren“ trennt (vom Standpunkt eines entfernten Beobachters)

→ **Ereignishorizont = Schwarzschild-Radius**

Es handelt sich dabei um eine Koordinatensingularität, die „vor Ort“ zu keinen physikalischen Anomalitäten führt, die aber von einem weit entfernten Beobachter als nicht durchdringbare Grenzfläche wahrgenommen wird (Stichwort „gefrorener Stern“).

# Der Ereignishorizont



$$d = 2 r_0$$

Objekt	Schwarzschildradius
Sonne	2925 m
Erde	9 mm
Mt. Everest	1 nm

Für jede Masse gibt es einen Schwarzschildradius

Kollabiert eine Masse unter seinen Schwarzschildradius, dann entsteht ein Black hole

Wird ein Objekt kleiner als sein Schwarzschildradius, dann entsteht eine Zentralsingularität

## Hinab in den Maelström ...

*Wie prahlerisch es auch klingt, es ist dennoch wahr: ich begann zu empfinden, welch herrliche Sache es sei, auf diese Weise zu sterben, und wie töricht es von mir war, beim Anblick solch großartigen Beweises von Gottes Herrlichkeit an mein eigenes erbärmliches Leben zu denken. Ich glaube, ich errötete vor Scham, als dieser Gedanke mir in den Sinn kam. Nach einiger Zeit erfaßte mich eine wilde Neugier bezüglich des Strudels selbst. Ich fühlte tatsächlich den Wunsch, seine Tiefen zu ergründen, obgleich ich mich selbst dabei opfern mußte, und mein hauptsächlichster Kummer war der, daß ich meinen alten Gefährten an Land niemals von den Wundern berichten sollte, die ich erschauen würde.*

Edgar Allan Poe

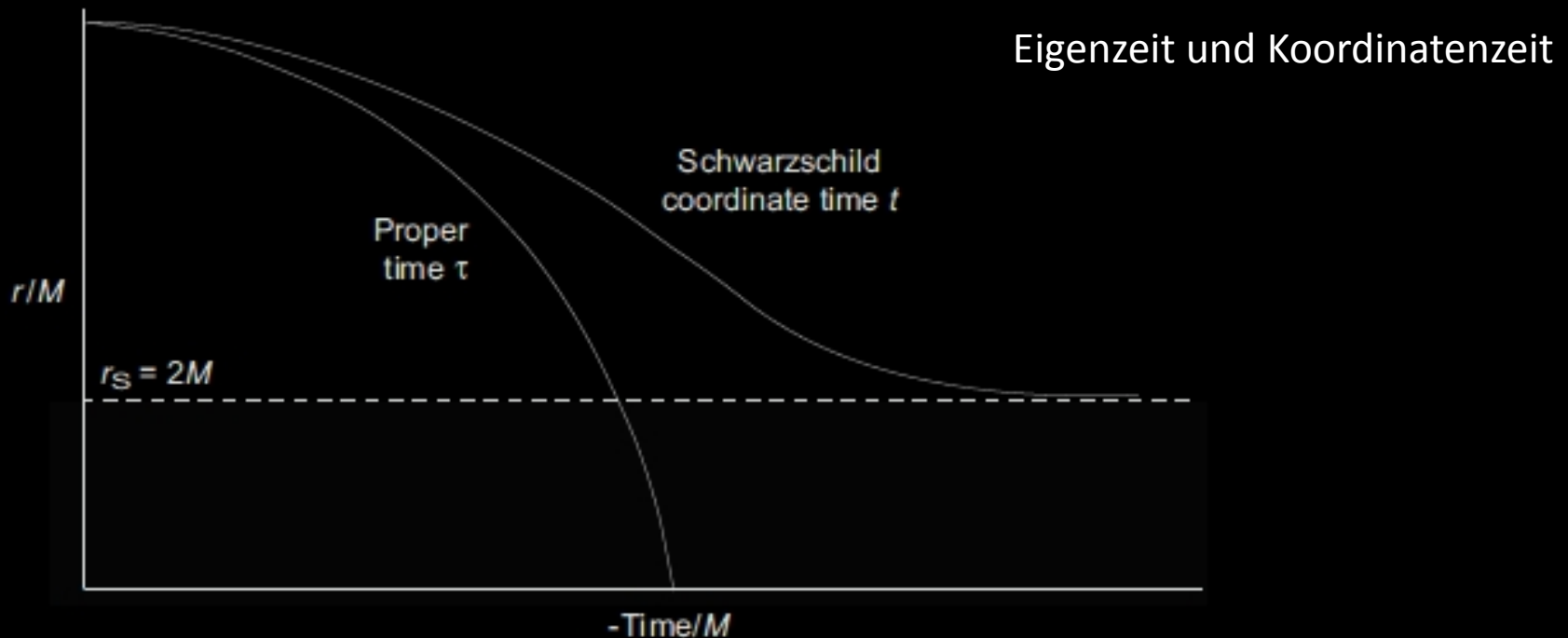




# Reise zum Mittelpunkt eines Schwarzen Lochs – Klassisches Bild

Man muß zwei Beobachtungspositionen unterscheiden:

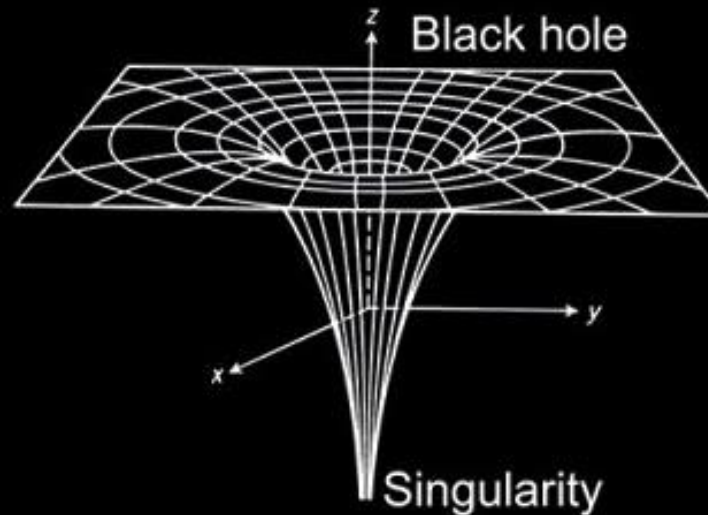
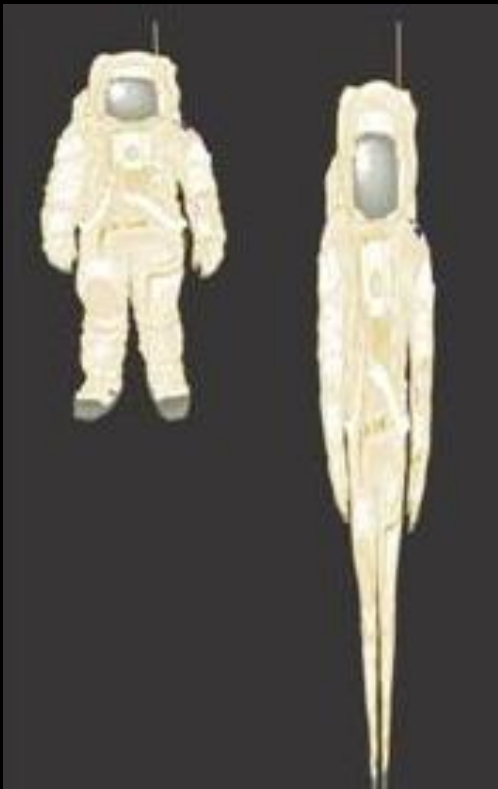
- der frei in das Schwarze Loch fallende Beobachter (er bewegt sich entlang einer Geodäten in Richtung Zentrum des Black hole
- ein weit entfernter Beobachter in einem Inertialsystem, der den in das Schwarze Loch fallenden Beobachter verfolgt



# „Spaghettification“ des fallenden Beobachters...

Füße fallen schneller als der Kopf...

Der freie Fall in ein Schwarzes Loch wird zunehmend unangenehmer (Streckbankeffekt) und endet für den Raumfahrer immer tödlich



Ist Gott allmächtig ?



COULD GOD CREATE A SUPER-MASSIVE  
BLACK HOLE SO MASSIVE EVEN HE HIMSELF  
COULDN'T ESCAPE IT... OH.

