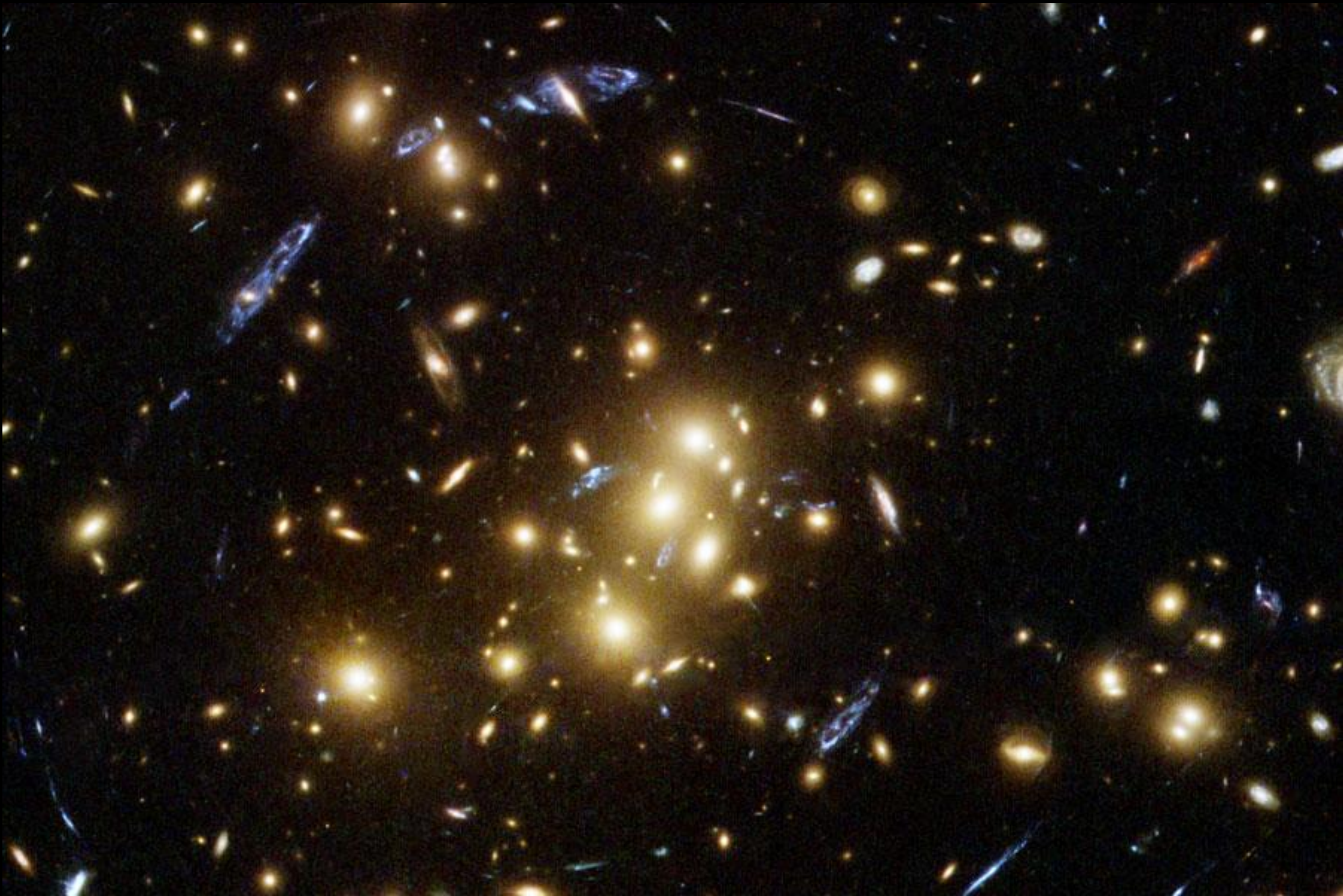
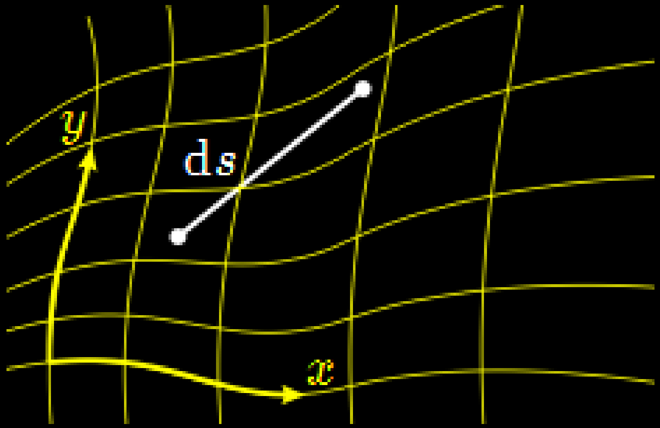
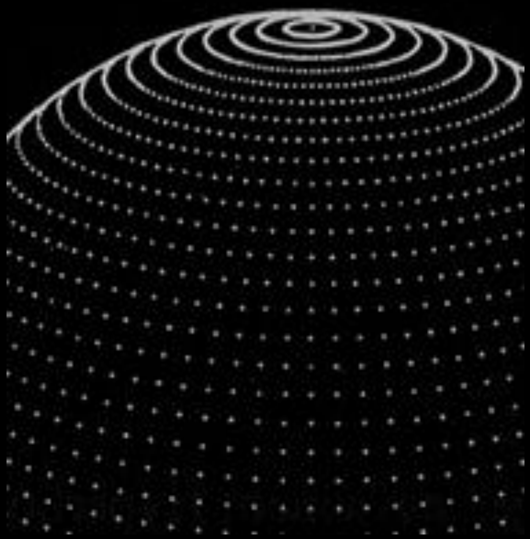
Gravitation und Krümmung der Raum-Zeit - Teil 1



Gauß hat gezeigt, daß es Möglichkeiten gibt, die Krümmung von Flächen durch inhärente Messungen auf der Fläche selbst zu bestimmen

→ ***Gauß'sches Krümmungsmaß***





$$ds^2 = 1 * \ dx^2 + 1 * \ dy^2$$

„Metrik" einer euklidischen Ebene, ausgedrückt durch das Linienelement *ds*

$$ds^2 = \ g_{11}\, dx^2 + \ g_{22}\, dy^2$$

Orthogonale „Metrik" einer gekrümmten Fläche

Erweiterung auf beliebigem n-dimensionale Räume

Allgemeine Theorie beliebig gekrümmter Räume:

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Antrittsvorlesung Universität Göttingen

Begründung der Differentialgeometrie

Riemann erkannte, das die Geometrie des kosmischen Raumes nicht a priori eine gegebene euklidische ist, sondern durch die Erfahrung (d.h. Beobachtung) explizit bestimmt werden muß.

Ausweitung des Begriffs der Metrik auf beliebige, n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Riemannsche Geometrie → Riemannsche Mannigfaltigkeit

Riemannsche Metrik einer zweidimensionalen Fläche

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1 dx_1 + g_{12} dx_1 dx_2 + g_{21} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2 dx_2$$

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{2} g_{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j$$

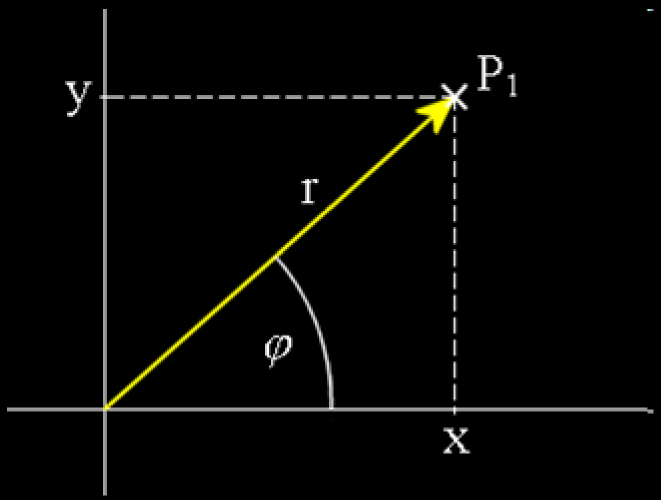
$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$ „Metrischer Tensor“

Beispiel: Euklidische Ebene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \equiv dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 = dx^2 + dy^2$$

In Polarkoordinaten



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

- Nur Hauptdiagonale <> 0: Orthogonales Koordinatensystem
- det g = 0: Koordinatensingularität

Ausweitung des Konzeptes auf n-dimensionale Räume

$$a)\ Euklidische\ Ebene\ \ n=2 \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$g^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ Euklidischer\ Raum\ \ n=3 \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$g^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Krümmung = 0

$$c)\ Euklidischer\ Raum\ \ n=4 \qquad ds^2 = \sum_{i=1}^{4} dx_i^2$$

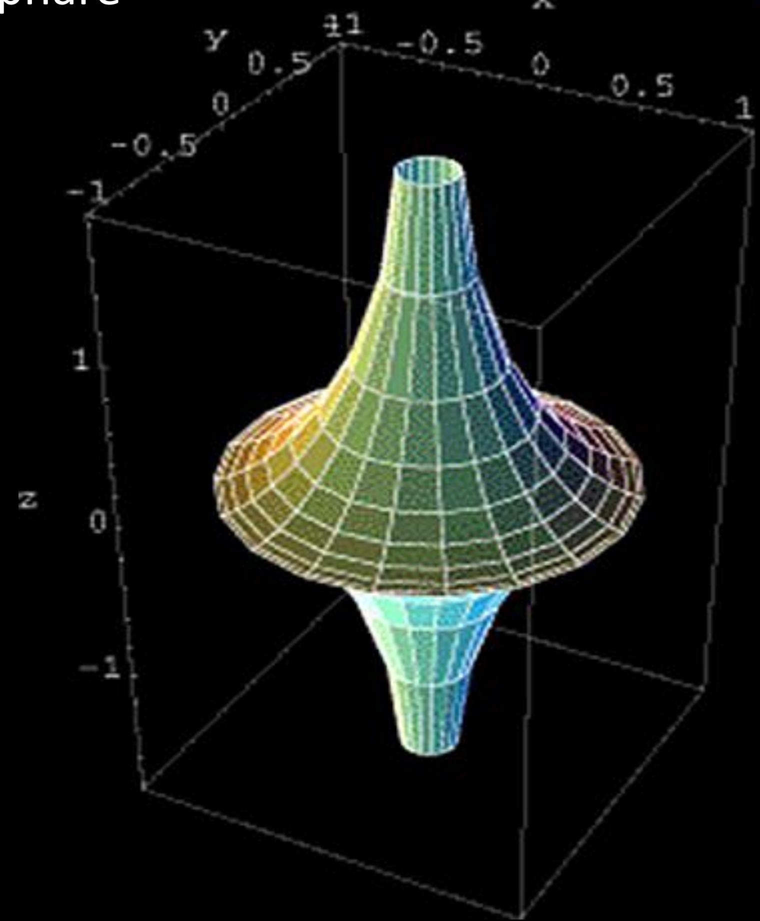
$$g^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etc. pp.

Beispiel: Lobatschewski-Raum $\rightarrow$ Pseudosphäre

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1-r^2\right)^2}\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right)$$

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\left(1-r^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4r^2}{\left(1-r^2\right)^2} \end{pmatrix}$$



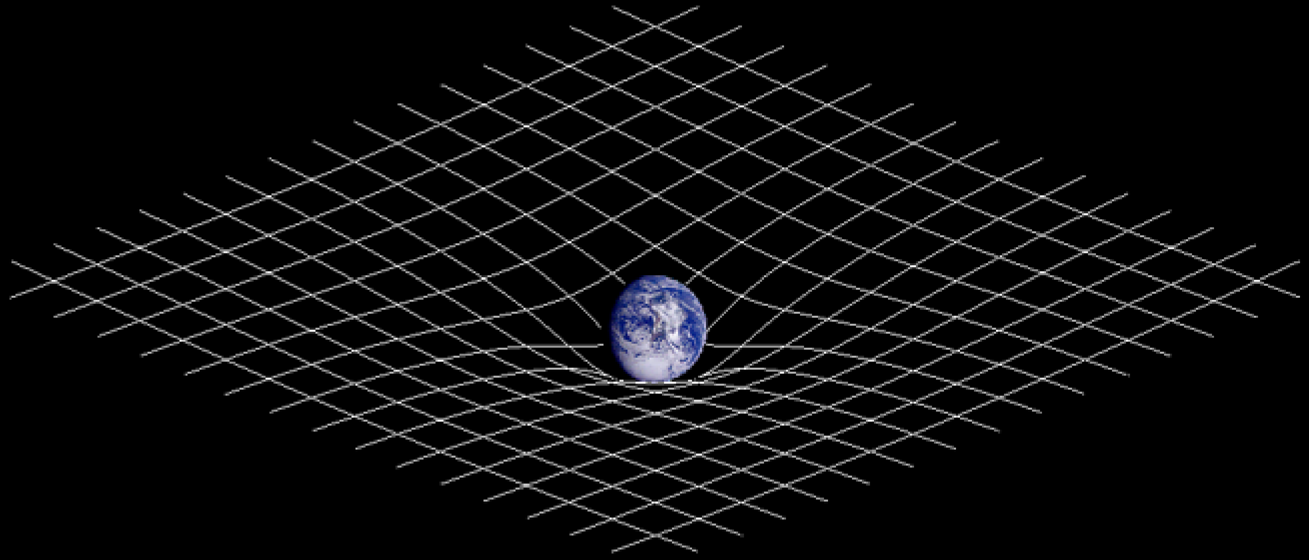
Diagonalelemente sind ortsabhängig -> Raum ist gekrümmt

Krümmung ist eine Eigenschaft des Raumes, nicht des Koordinatensystems (Riemann)

Koordinatensingularität bei r = 0

Der gekrümmte dreidimensionale Raum

- kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten: Geodäte - „Lichtweg“ (Fermat)
- „Krümmung“ nicht mehr vorstellbar, aber meßbar
- Die Frage, welche Struktur (metrische und topologische) der physikalische Raum hat, kann nur empirisch (d.h. durch Messungen) festgestellt werden
- lokal läßt sich der physikalische Raum mit hoher Genauigkeit durch eine euklidische Metrik beschreiben



Herrmann Minkowski: Raum und Zeit bilden ein vierdimensionales Raum-Zeit -Kontinuum

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem gleich (c als Naturkonstante)
Kovarianzprinzip

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Linienelement der flachen Minkowski-Raum-Zeit:

$$ds^2 = c^2 * 1 * dt^2 - 1 * dx^2 - 1 * dy^2 - 1 * dz^2 \qquad (+---)$$

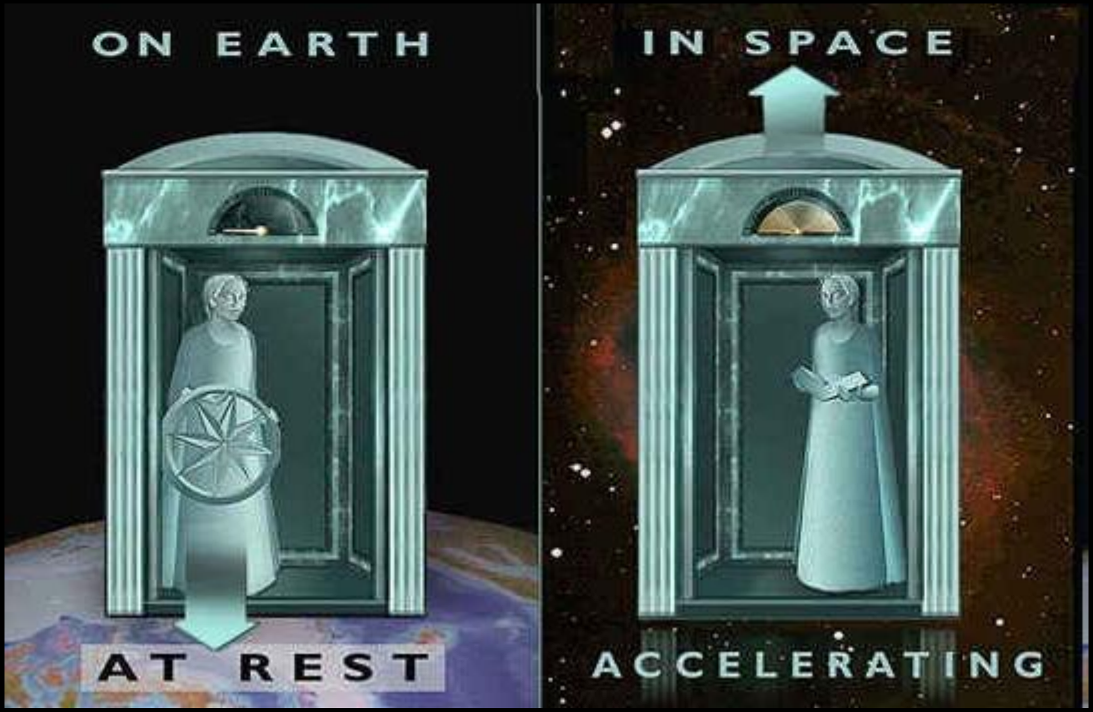
$$ds^2 = \begin{pmatrix} > 0 \ \ zeitartig \\ = 0 \ \ lichtartig \\ < 0 \ \ raumartig \end{pmatrix}$$

Raumartige Ereignisse können nicht kausal miteinander verbunden sein

Zeitartige Ereignisse können kausal miteinander verbunden sein

Beobachtung: In einem Schwerefeld ist die Beschleunigung für alle Körper unabhängig von ihrer stofflichen Beschaffenheit immer gleich

Das Gleichnis mit den Fahrstühlen …

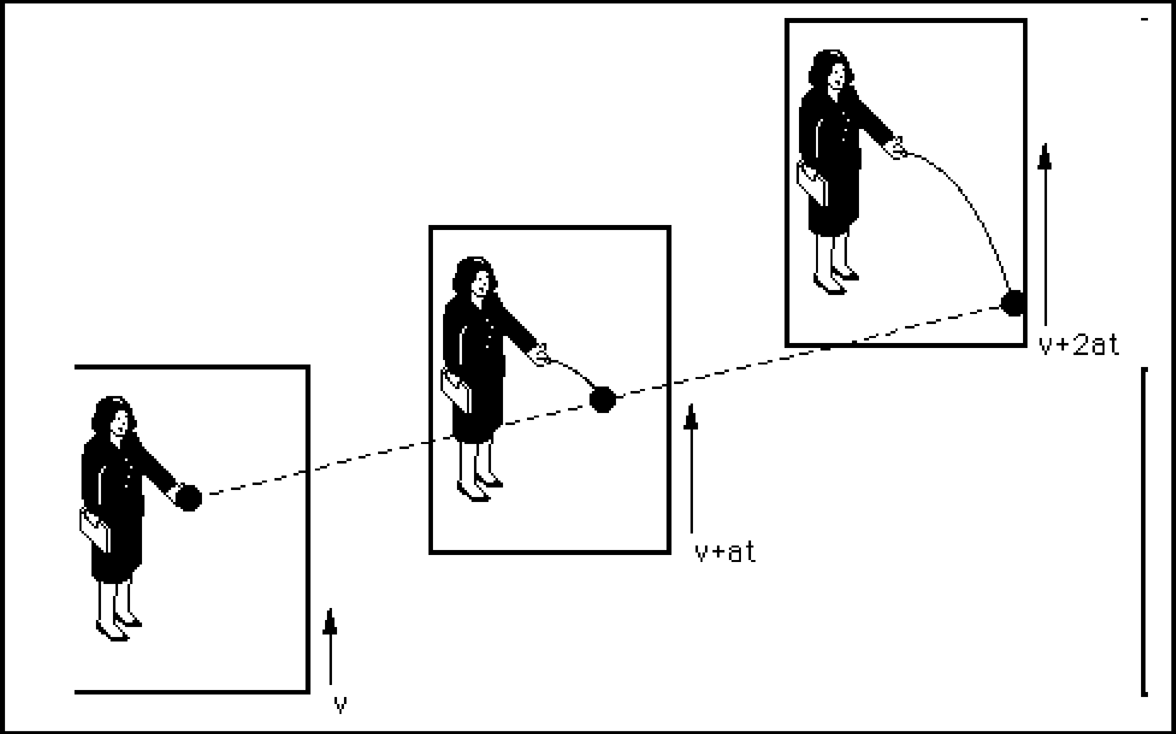


ÄQUIVALENZPRINZIP

„Frei schwebendes Bezugssystem“ → Lokales Minkowski-System

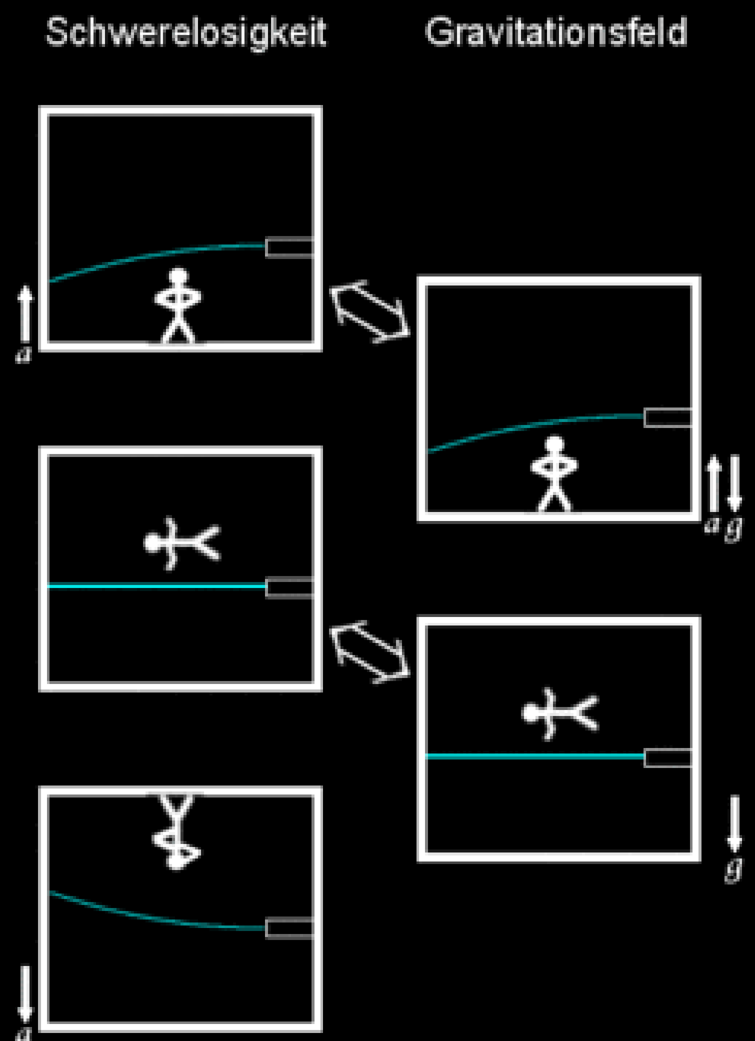
Erkenntnis:

In einem hinreichend kleinen „Raum“ (= lokales Minkowski-System) kann man durch keine physikalische Messungen in dessen Inneren (= Lift-Kabine) fest-stellen, ob dieser Raum in einem homogenen Gravitationsfeld mit der Schwere-beschleunigung g ruht oder durch eine von außen wirkende Kraft mit der Beschleunigung g beschleunigt wird.



Lichtablenkung in einem beschleunigten Bezugssystem - Gravitationsfeld

Es ist durch kein Experiment innerhalb des Raumschiffs zu entscheiden, ob sich das Raumschiff gleichmäßig mit g beschleunigt bewegt oder sich ruhend in einem Schwerefeld mit der Schwere-beschleunigung g aufhält.



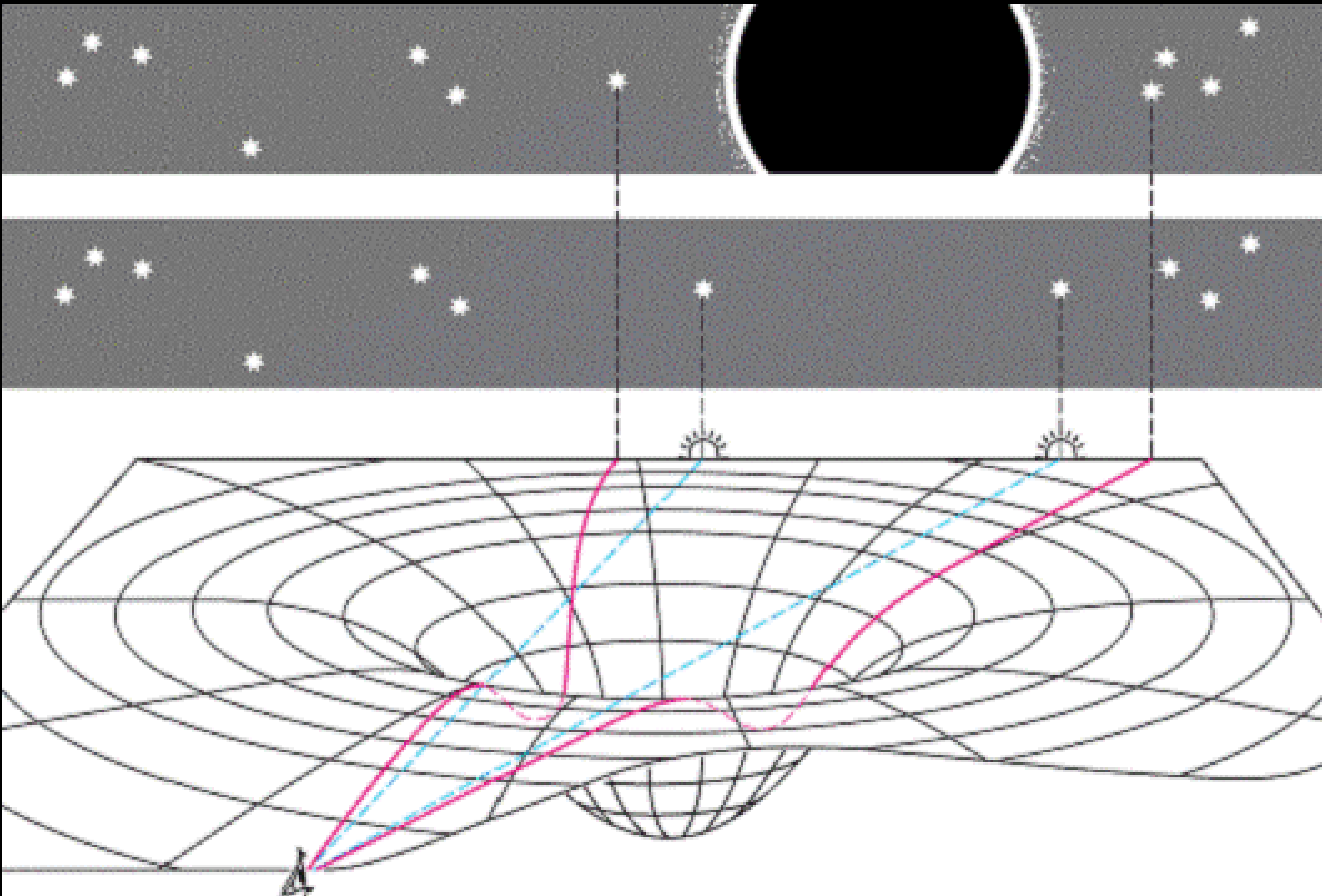
Kürzester Weg zwischen zwei Ereignissen:

$$\int_A^B ds^2 = Extremal$$

Geodäte

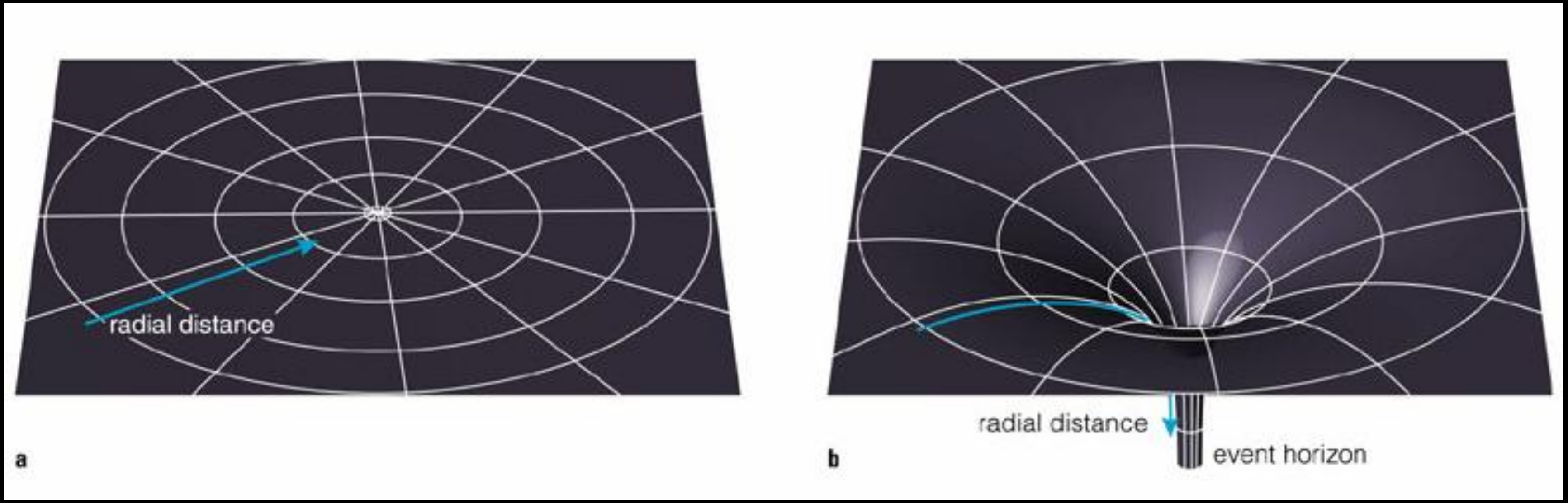
(antriebsloseses Raumschiff)

„Geometrisierung“ der Raum-Zeit



Geodäte:

- In einem euklidischen Raum -> Gerade
- Nichteuklidischen Raum   -> „gekrümmte“ Linie



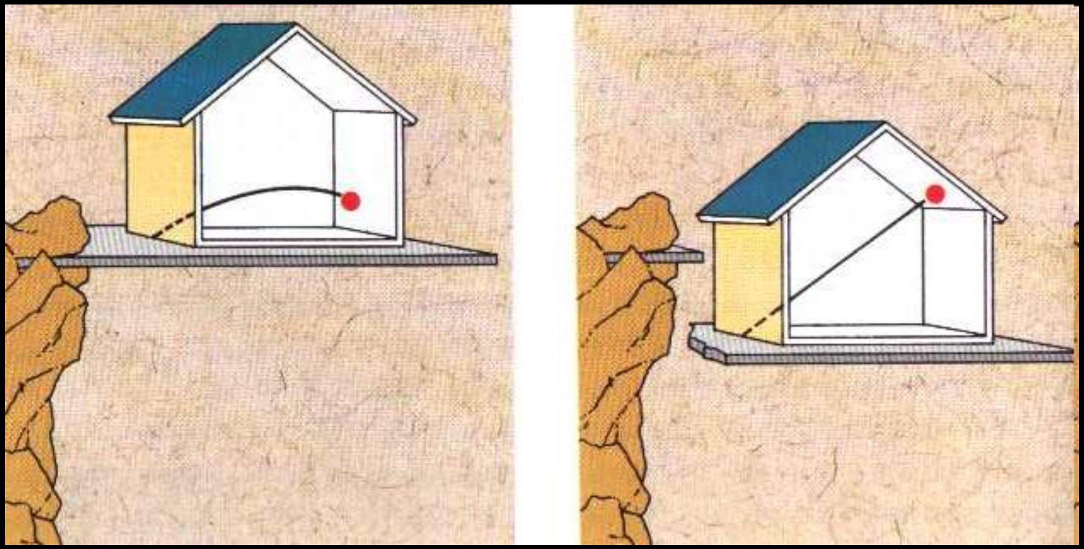
Durch was ist eine „Geodäte“ von anderen Verbindungslinien von einem Ereignis A zu einem Ereignis B ausgezeichnet?

Eine Geodäte ist die Bahn durch die Raumzeit, auf der ein Körper maximal altert …

→ Bedingung für kräftefreie Bewegung von einem Ereignis A zu einem Ereignis B

Prinzip des maximalen Alterns

Gravitation nach Einstein



Im freischwebenden Bezugssystem bewegt sich der Ball entlang einer Geraden, im fest im Gravitationsfeld verankerten Bezugssystem dagegen entlang einer Wurfparabel.

Der Freie Fall ist eine Illusion. Jeder nicht beschleunigte Körper bewegt sich entlang einer Geodäten durch die Raumzeit. Die Gravitation wird nur dadurch „vorgetäuscht“, daß man sich in einem besonderen, nicht-frei fallenden Bezugssystem (z.B. der Erdoberfläche) befindet.

Einsteinsche Gravitationsfeldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik}$$

Krümmung der Raumzeit = universelle Konstante x Energie- und Impulsdichte

Die Raumzeit wirkt auf die Masse (Energie), indem sie ihr sagt, wie sie sich bewegen soll; die Masse (Energie) wirkt umgekehrt auf die Raumzeit, indem sie ihr sagt, wie sie sich krümmen soll.

Eine Gleichung ist dann erfüllt, wenn die rechte und die linke Seite identisch ist.

Gegeben: Masse- (Energie) und Impulsverteilung in einem Raumgebiet

Lösung: Krümmung der Raum-Zeit in diesem Raumgebiet

Die Lösung wird gewöhnlich in Form einer Metrik angegeben, d.h. man berechnet die Größe der einzelnen Komponenten des metrischen Tensors **g**

Der metrische Tensor bestimmt das Linienelement ds (die Metrik) in diesem Raumbereich. Deshalb wird gewöhnlich die Metrik, welche die Einsteinschen Feldgleichungen für eine gegebene Masseverteilung genügt, als Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.