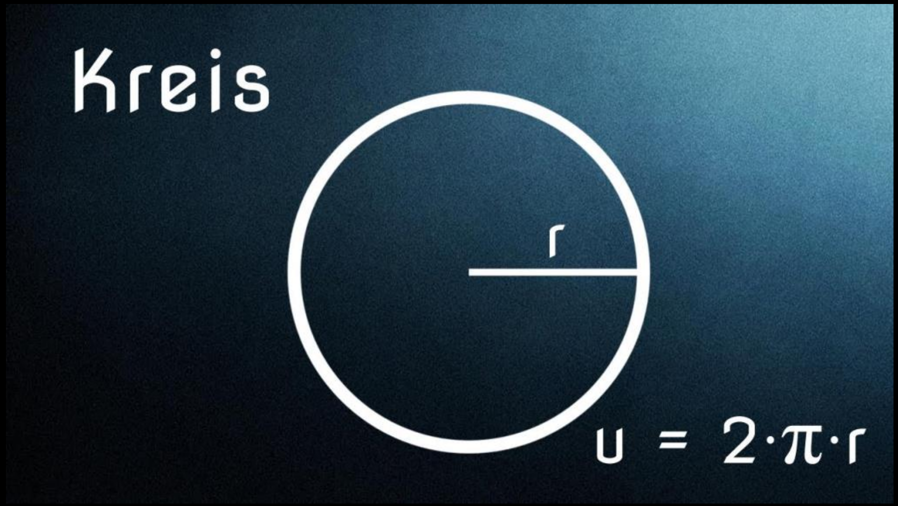
Die Ludolphsche Zahl

Schon in der Antike war bekannt, dass das Verhältnis von Kreisumfang U zu Kreisdurchmesser d=2r bei jedem beliebigen Kreis gleich ist:



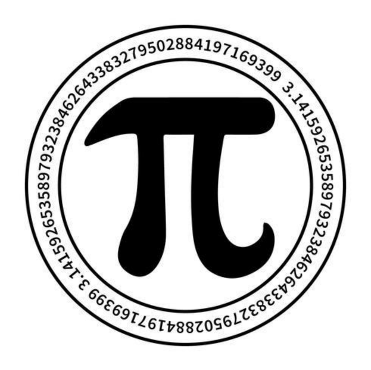
Der Umfang des Einheitskreises ist gleich Pi

Die Bezeichnung „Pi“ wurde erst im 18 Jhd. geprägt (p=Peripherie), und zwar von **William Jones** (1675-1749).

Sie konnte sich durchsetzen, weil **Leonard Euler** (1707-1783) sie in seinen mathematischen Schriften extensiv verwendete.

Zum ersten Mal wurde Pi wahrscheinlich durch Rektifikation eines Rades zu ungefähr „3“ bestimmt

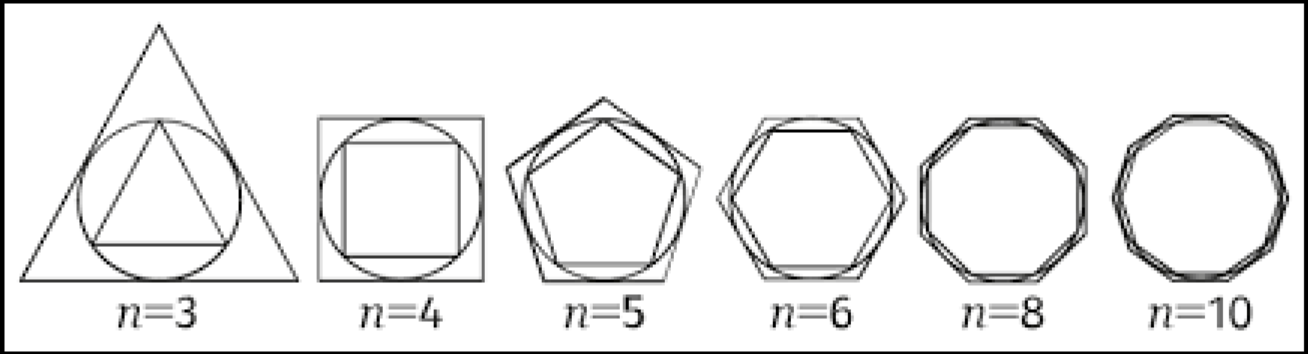
→ Bibel: Buch der Könige (ca. 500 v. u. Z,)



Im Laufe der Menschheitsgeschichte hat man versucht, dieses Verhältnis immer genauer zu bestimmen, so dass heute von Pi 50 Billionen (10^12) Nachkommastellen bekannt sind… (Timothy Mullican, 29. Januar 2020)

In der Antike wurde in der Praxis fast durchgängig der Wert 3, und später, im römischen Reich der von Marcus Vitruvius Pollio (85 v.Chr. - 20 n. Chr.) angegebene Wert von 25/8 = 3.125 verwendet.

Die Methode von Archimedes (287 – 212 v. Chr.)



$$a_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{2n} = \sqrt{a_{2n} b_n}$$

$$3{,}1408450 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \approx 3{,}1428571$$

Seit Archimedes entwickelte sich dann eine Art von „Sport“ unter Mathematikern, immer mehr Dezimalstellen der Kreiszahl zu berechnen, was sich ohne Computer schon immer als schwierig und fehleranfällig erwies. Die Frage, die dabei im Raum stand, war, ob die Nachkommastellen einmal aufhören oder in eine Periode übergehen. Wenn das der Fall ist, sollte man Pi auch exakt als Bruch zweier ganzer Zahlen aufschreiben können.

Hinweis: In der Antike war durchaus bekannt, dass es auch konstruierbare Zahlen gibt, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, z. B. Wurzel(2). Solche Zahlen werden als „irrational“ bezeichnet.

Claudius Ptolemäus (100-170 n.Chr.)	pi = 377/120 = 3.1417
Wang Fang (217-257 n.Chr)	pi = 142/45 = 3.1556
Liu Hui (220.280 n.Chr)	pi = 3.141592104
Chongzhi (429-400 n.Chr.)	pi = 3.1415926
Brahmagupta (598-665 n.Chr.)	pi = sqrt(10) = 3.1623
Leonardo von Pisa (Fibonacci) 1170-1250	pi = 3.141818
Valentin Otto (1550-1603)	pi = 355/113 = 3.1416
Francois Viete um 1580	pi = 3.141592653

François Viète entwickelt die erste analytische Darstellung von Pi

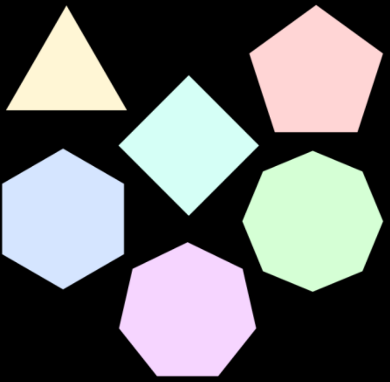
$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) \cdots$$

Aus geometrischen Erwägungen entwickelte er die erste exakte Darstellung der Kreiszahl Pi in Form einer unendlichen Reihe

$$a_1 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$a_n := \frac{1}{2}\sqrt{2+2a_{n-1}} \qquad n \geq 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots = \frac{2}{\pi}.$$



Ausgehend von einem Quadrat (n=2) verwendet Vieta eine Folge von regelmäßigen 2^n - Ecken, die dem Einheitskreis einbeschrieben sind und sukzessive den Flächeninhalt approximieren. Die bei der Verdopplung benötigten Längen und Verhältnisse erhält Vieta durch elementare geometrische Überlegungen (zum Beispiel mittels des Satzes von Pythagoras).

Ludolph van Ceulen (1540-1610) – der Fleißarbeiter

Er verwendet die Freizeit des Großteils seines Lebens, um mit Hilfe der Archimedischen Methode sukzessive so viele Dezimalstellen wie möglich von Pi zu berechnen.

Archimedes kam bis zum regelmäßigen 96-Eck

Ludolph van Ceulen bis zum

2^62 = 4611686018427387904 – Eck (> 4-Trillionen)

wofür er ca. 30 Jahre benötigte.

Für diese Berechnung wurde er weitgehend bewundert, weshalb man die Zahl

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88

zu seinen Ehren „Ludolphsche Zahl“ genannt hat. Erst später wurde sie „Pi“ genannt.

Analytische Darstellungen der Zahl Pi

Die Zahl Pi lässt sich nur näherungsweise aufschreiben, formelmäßig aber durchaus exakt auf vielfältige Art und Weise darstellen, und zwar in Form unendlicher Reihen.

Die erste Reihenentwicklung von Pi wurde von François Viète angegeben. Bei der späteren Analyse der Winkelfunktionen wurden dann durch Leibniz und Euler weitere Reihendarstellungen von Pi abgeleitet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Leibniz-Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler-Reihe

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot (1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}$$

Ramanujan-Reihe

Pi – eine ganz besondere Zahl

Pi ist eine irrationale Zahl

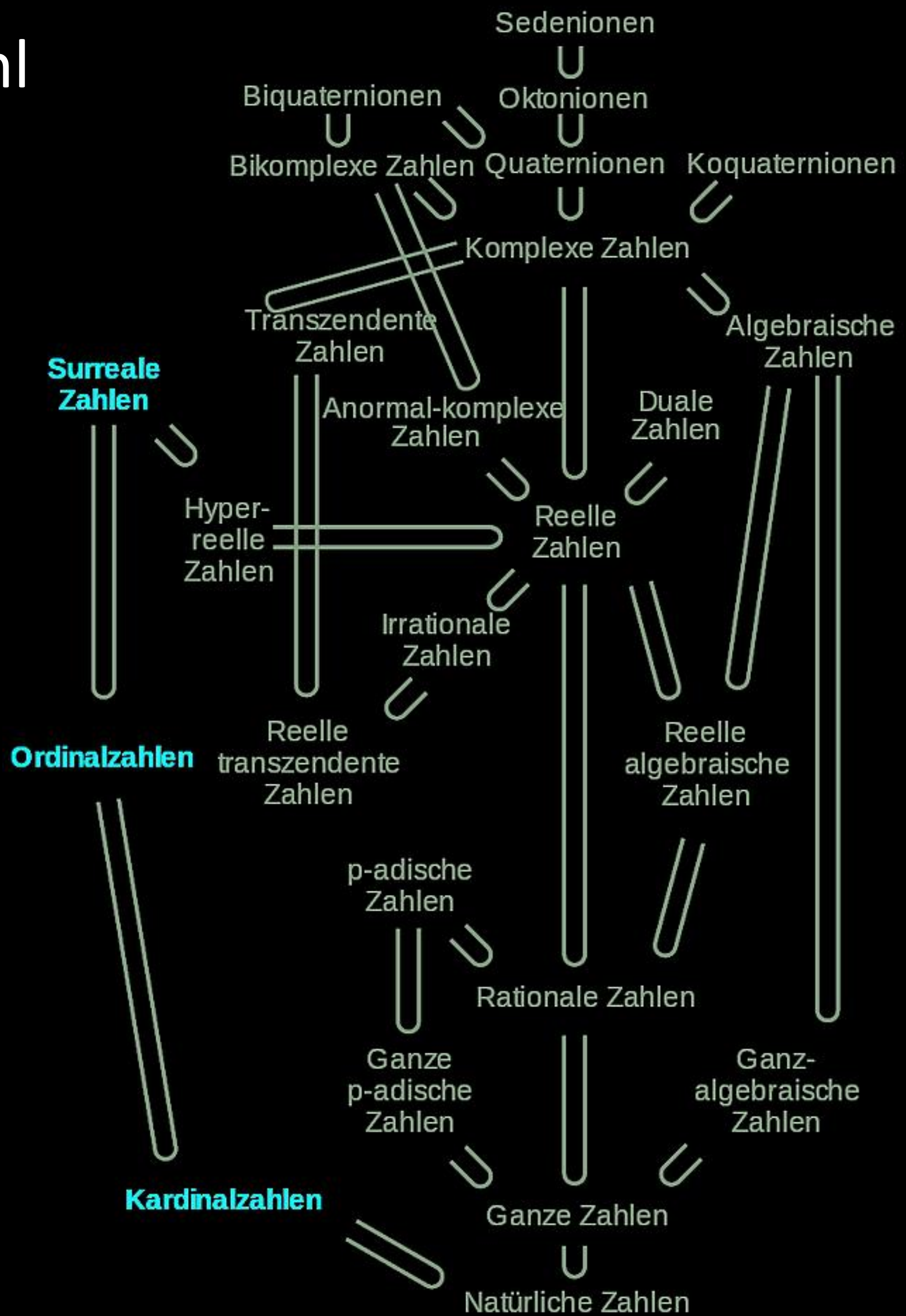
(**Beweis:** 1761 durch
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Pi ist eine transzendente Zahl

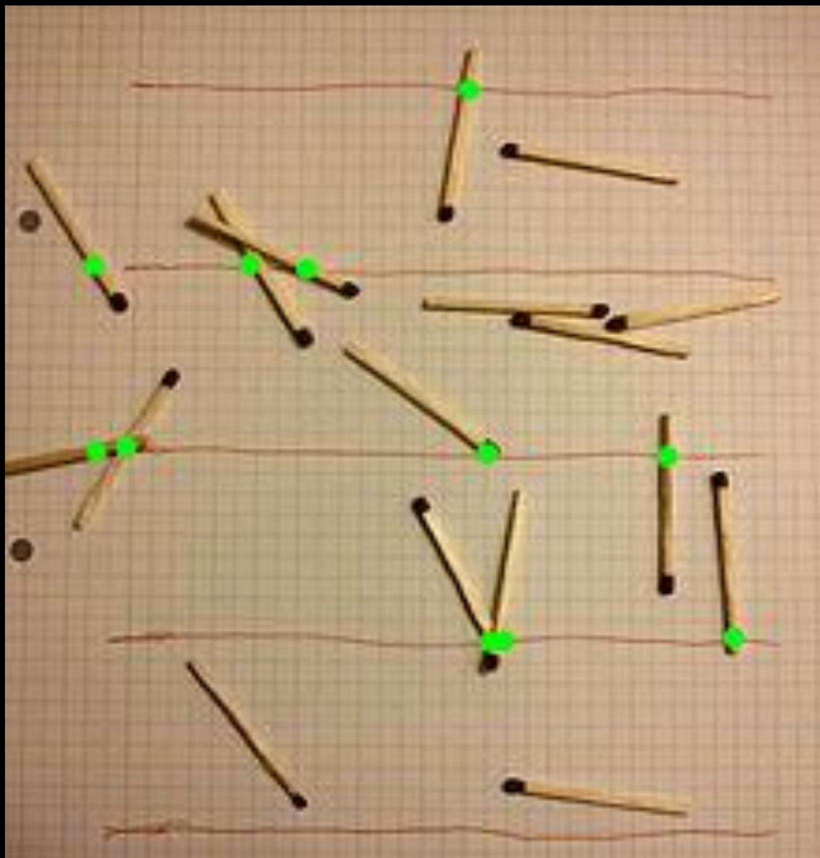
(**Beweis:** 1882 durch
Carl Louis Ferdinand Lindemann
(1852-1939)

Pi ist eine normale Zahl

(**Beweis steht noch aus**



Wie der Zufall so will – Das Buffonsche Nadelproblem



Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon
(1707-1788)

Stäbchen der Länge l
Abstand der Linien = l

Zufallswürfe: Man zähle, wie viele geworfene Stäbchen eine Linie kreuzen und wie viele nicht.

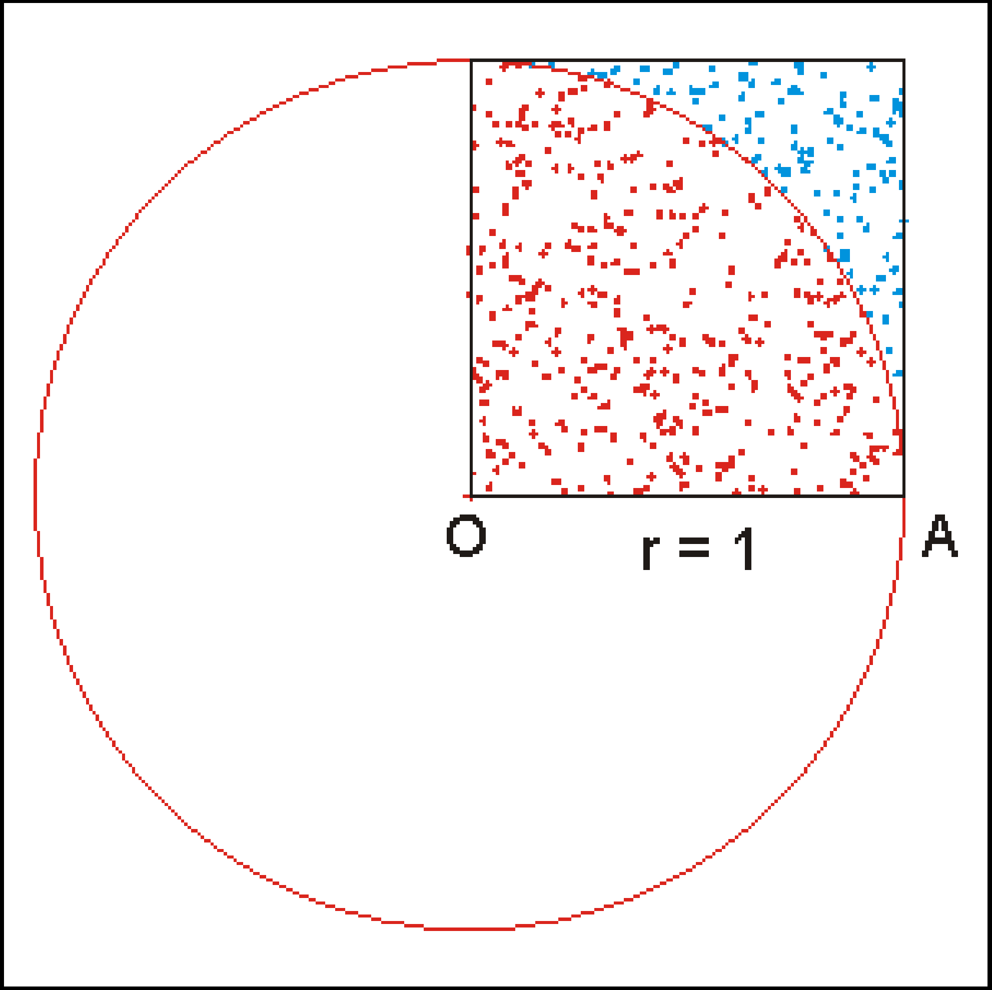
Das Verhältnis

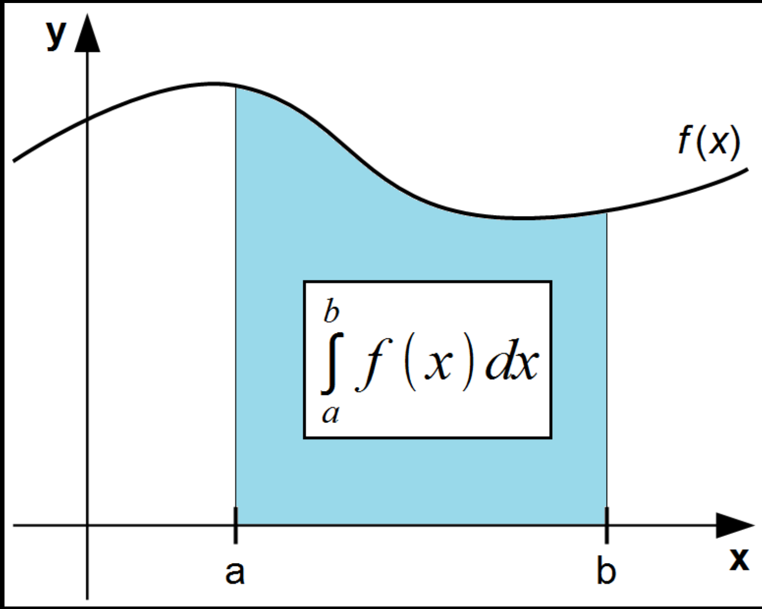
2 mal Anzahl Gesamtwürfe zu
Würfe mit Linienkreuzung

konvergiert gegen Pi. Oder ganz allgemein:

$$\pi \approx \frac{2 \cdot N_A \cdot l}{N_C \cdot d}$$

Flächenberechnung mit der Monte-Carlo-Methode





Transformiere Integrationsbereich in ein Einheitsquadrat und stelle sicher, dass die Funktion zwischen a und b stetig ist und keine Polstellen aufweist.

Erzeuge gleichverteilte Zufallszahlen und bestimme die Anzahl, die in die unter dem Integral liegende Fläche fallen. Sie ist ein Maß für den Wert des bestimmten Integrals.

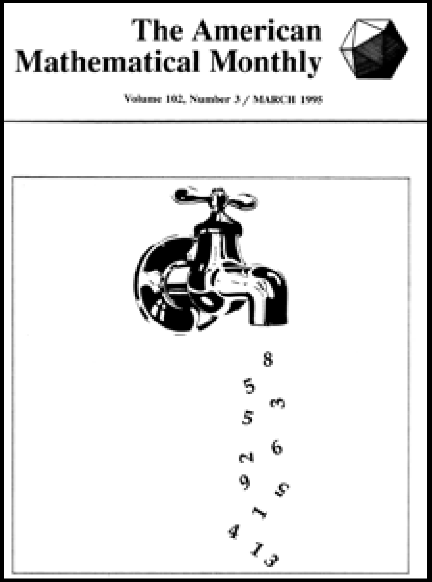
Pi auf beliebig viele Stellen – der Tröpfelalgorithmus

A Spigot Algorithm for the Digits of Pi

Stanley Rabinowitz and Stan Wagon

It is remarkable that the algorithm illustrated in Table 1, which uses no floating-point arithmetic, produces the digits of π. The algorithm starts with some 2s, in columns headed by the fractions shown. Each entry is multiplied by 10. Then, starting from the right, the entries are reduced modulo *den*, where the head of the column is *num*/*den*, producing a quotient q and remainder r. The remainder is left in place and $q \times num$ is carried one column left. This reduce-and-carry is continued all the way left. The tens digit of the leftmost result is the next digit of π. The process continues with the multiplication of the remainders by 10, the reductions modulo the denominators, and the augmented carrying.

TABLE 1. The workings of an algorithm that produces digits of π. The dashed line indicates the key step: starting from the right, entries are reduced modulo the denominator of the column head $(25, 23, 21, \ldots,$ resp.), with the quotients, after multiplication by the numerator $(12, 11, 10, \ldots)$, carried left. For example, the 20 in the $\frac{9}{19}$'s column yields a remainder of 1 and a left carry of $1 \cdot 9 = 9$. After the leftmost carries, the tens digits are 3, 1, 4, 1. To get more digits of π one must start with a longer string of 2s.



Rabinowitz, Stanley; Wagon, Stan (1995). "A Spigot Algorithm for the Digits of Pi". American Mathematical Monthly. 102 (3): 195–203

Ist jedes Buch der Welt irgendwo in Pi verschlüsselt?

- Verschlüsselung nach ASCII-Code
- Pi in eine entsprechende Zeichenfolge übersetzen
- Beachten, dass Pi unendlich viele Dezimalstellen besitzt

```
3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844
6095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456
4856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652
13841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491
 O P   A   Y O  X T       S  O  C XT T GQE     K KF RUJ J      X HNQQ  G  V UIY  V  PD  RZ   VLRFGCO RVO PIVA N  RX GB  FJ  T
J  F RWX RHZ     IQM T QLLRJ  C T KC FBT  U VLKF       W   Y     D QT     XQKJ K BA       M T K   RX  NVCNS QA  GMUBTZJ O
U BE X   D  V KE     B  RVN     HH  CY  O M I HY  WFAGB G  P  XQRJ XQP UJ UJ   R  Z  J RGP     CNY Z ZD  ABLN  F  F  XRUE BA VN
T O E  T  P LQ J    F H FD A K    T   J VSV LRI QT    LRO  KF LSU  PHJ   X O    J   CI  SXU K  HY Y MW O  QSS BLT
```

Die Frage muss eindeutig mit „ja“ beantwortet werden, vorausgesetzt, Pi ist eine „normale Zahl“:

Eine irrationale Zahl ist "normal" zur Basis 10, wenn die Ziffern 0, 1, 2, 3, ...9 sowie jede Kombination wie 00 bis 99, 000 bis 999 etc. in der Dezimaldarstellung jeweils mit der gleichen Häufigkeit erscheinen.

Dieser Satz konnte aber bisher noch nicht bewiesen werden

2001: Bailey-Crandall-Vermutung: Jede irrationale algebraische Zahl ist normal.

3.14

159265358979323846264338327
950288419716939937510582097
49445923078164062862089986
28034825342117067982148086513282
30664709384460955058223172535940812848
1117450284102701938521105559644622948954
9303819644288109756659334461284756482337867831652712
01909145648566923460348610454326648213393607260249
1412737245870066063155881748815209209628292540917153
6436789259036001133053054882046652138414695194151160
9433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749
567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946
39522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940
513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122
4953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034
41815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206
17177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
1712268066130019278766111959092164201989380952572010654858632788659...