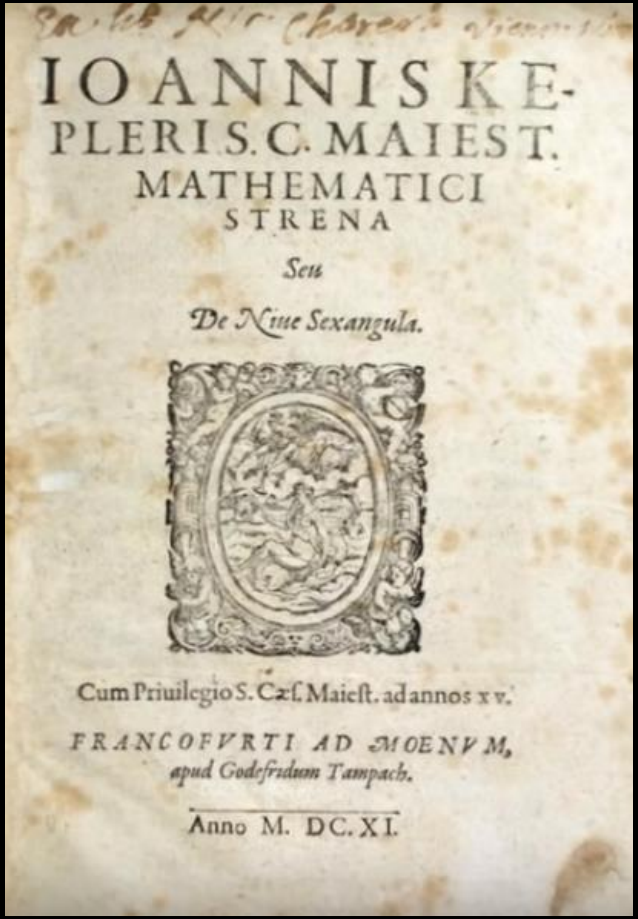
Erwachende Wissenschaft – Teil 55

Wissenschaft in der beginnenden Neuzeit



Johannes Kepler (1571 - 1630)

Auf dem Weg
in die Neuzeit VI

Weitere mit Johannes Kepler verbundene wissenschaftliche Probleme

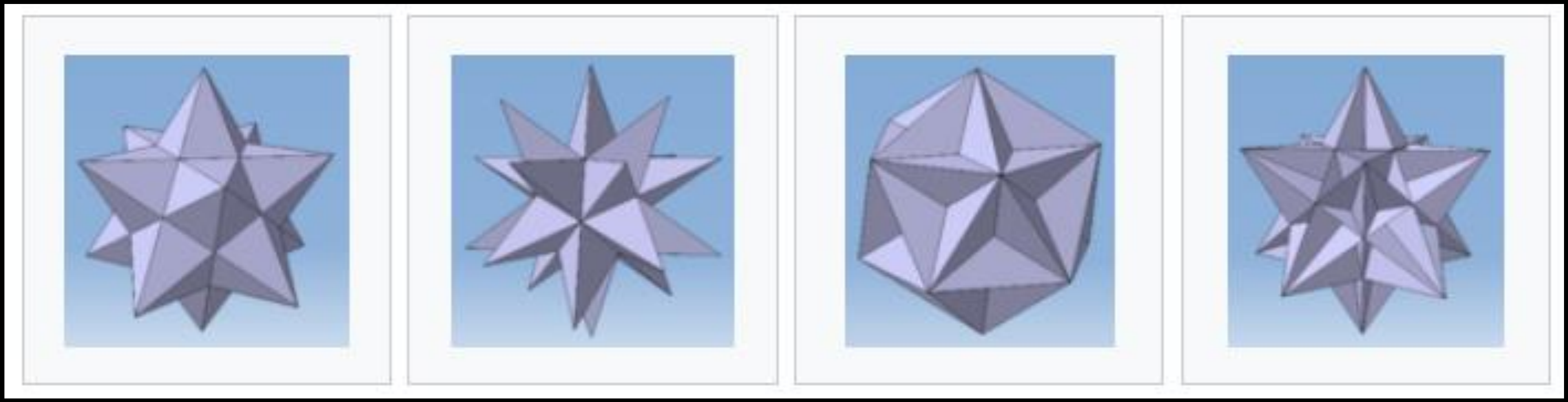
Johannes Kepler: nicht nur theoretischer Astronom...

Mit dem Namen von Johannes Kepler sind neben dem Planetengesetzen und dem „Keplerschen Fernrohr“ noch weitere wissenschaftliche Begrifflichkeiten verbunden:

- **Kepler-Poinsot-Körper**
- **Kepler-Problem = Zweikörperproblem**
- **Kepler-Potential**
- **Kepler-Gleichung**
- **Kepler-Konstante**
- **Keplersche Elemente der Planetenbahn**
- **Kepler-Rotation von Galaxien und Akkretionsscheiben**
- **Keplersche Fassregel**
- **Keplersche Fraktale**
- **Keplersche Vermutung**

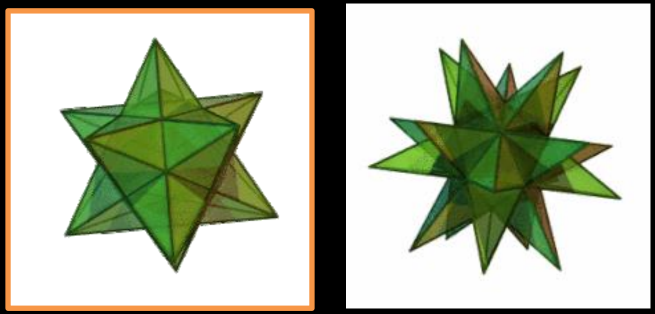
Kepler – Poinsot - Körper

Kepler-Poinsot-Körper sind reguläre, nicht-konvexe Polyeder und zählen zu den Sternkörpern. Dazu gehören der **Kleine sternförmige Dodekaeder-** und der **Kleingroße sternförmige Dodekaeder** sowie das **Große Dodekaeder** und das **Große Ikosaeder.** Benannt sind sie zu Ehren von Johannes Kepler (1571–1630) und Louis Poinsot (1777–1859).



Kleines sternförmiges Dodekaeder

Kleingroßes sternförmiges Dodekaeder

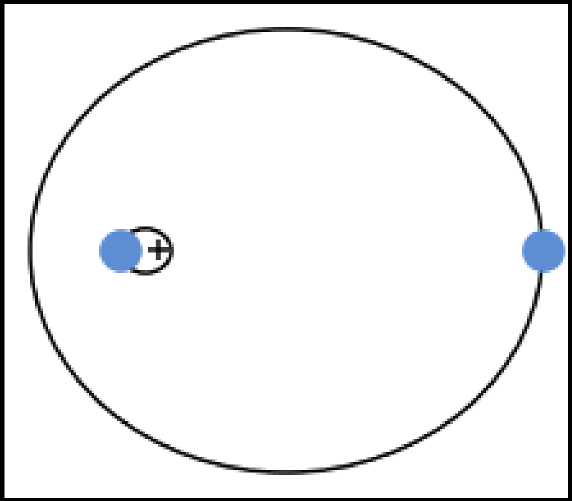


Kepler-Problem = Zweikörperproblem

In der Physik bezeichnet man als Zweikörperproblem die Aufgabe, die Bewegung zweier Körper zu berechnen, die ohne zusätzliche äußere Einflüsse nur miteinander wechselwirken. Sie bilden ein **Zweikörpersystem**.

→ Zweikörperstoß
→ Bewegung zweier Körper in einem gegebenen Potential

In der Astronomie wird das **Zweikörperproblem** auch als **Keplerproblem** bezeichnet, weil Johannes Kepler in den drei nach ihm benannten Gesetzen als Erster die genaue Form der Bewegung für gebundene Zweikörpersysteme angeben konnte. Ihre Herleitung ist eine Standardaufgabe der klassischen Mechanik, die zuerst von Isaac Newton gelöst wurde.

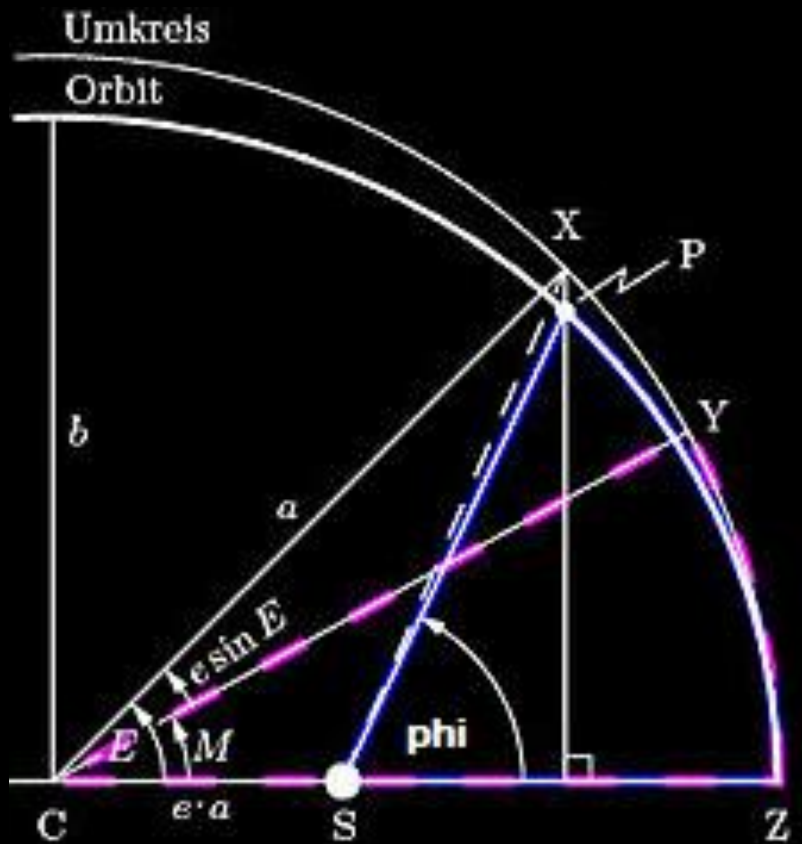


Das Kepler-Problem (Bewegung zweier Körper im Newtonschen Gravitationspotential) ist vollständig analytisch lösbar (Newton 1666). Es impliziert Ellipsen-, Parabel- und Hyperbelbahnen.

Das „inverse Problem“ des Zweikörperproblems ist die „Bahnbestimmung der Himmelskörper“

Die Kepler-Gleichung

Die Kepler-Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der mittleren Anomalie M und der exzentrischen Anomalie E der Planetenbewegung dar und ist fundamental für das inverse Zweikörperproblem (Ephemeridenrechnung)



$$E = M + e \sin E$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t$$

Kepler erkannte die Transzendenz seiner Gleichung und stellte fest, dass man sie immer nur näherungsweise lösen kann.

Astronomia nova Kapitel 60:

„Ist jedoch die mittlere Anomalie gegeben, so gibt es keine geometrische Methode, um zur ausgeglichenen („wahre“, d.A.) Anomalie oder zur exzentrischen Anomalie zu gelangen. Denn die mittlere Anomalie ist aus zwei Flächenstücken zusammengesetzt, einem Sektor und einem Dreieck. Während der erstere durch den Exzenterbogen gemessen wird, erhält man das letztere, wenn man den Sinus dieses Bogens mit dem Inhalt des größten Dreiecks multipliziert und die letzten Stellen abschneidet. Allein der Verhältnisse zwischen Bogen und zugehörigem Sinus gibt es unendlich viele. Ist also die Summe beider gegeben, so kann man nicht sagen, wie groß der Bogen und wie groß der Sinus ist, der dieser Summe entspricht, wenn ir nicht vorher ermitteln, wie groß die Fläche ist, die zu einem gegebenen Bogen gehört, d.h. wenn wir nicht Tafeln aufstellen und mit ihnen a posteriori operieren. Dies ist meine Ansicht. Je weniger geometrische Schönheit dem Problem zuzukommen scheint, desto dringender fordere ich die Mathematiker auf, sie sollen mir folgendes Problem lösen:

Wenn der Flächeninhalt von einem Teil eines Halbkreises, sowie ein Punkt auf dem Durchmesser gegeben ist, einen Bogen und einen Winkel an diesem Punkt so zu bestimmen, daß die Schenkel des Winkels und der Bogen die gegebene Fläche umschließen. Oder: Die Fläche eines Halbkreises von einem beliebig gegebenen Punkt des Durchmessers aus in gegebenen Verhältnis zu teilen.

Mir genügt die Überzeugung, daß eine Lösung a priori nicht möglich ist wegen der heterogenen Beschaffenheit von Bogen und Sinus. Wer immer mir aber einen Irrtum und einen Ausweg nachweist, der sei mir ein großer Mathematiker gleich Apollonius.“

Keplersche Fassregel

Beim Einkauf von Weinfässern für seine zweite Hochzeit beobachtet Kepler zu seinem Missfallen, dass die Weinhändler das Volumen eines Fasses bestimmen, indem sie eine geeichte Messrute durch das Spundloch einführen, die Länge l bis zu den Rändern der Böden messen und daraus das Volumen anhand der kubischen Teilungsmarken (1-8-27-64-125...), die in Eimern angegeben sind, mit Hilfe der Formel

$$V_{Fass} \approx 0.6 * l^3$$

berechnen, egal, welche Form die Fässer haben.

Ein rotationssymmetrisches Fass der Höhe *h*, dem Radius *r* am Boden und Deckel und dem Radius *R* des Mittelschnittes und den zugehörigen Kreisumfängen *u* und *U* hat näherungsweise das Volumen

$$V_{Fass} \approx \pi \frac{h}{3} (r^2 + 2R^2)$$

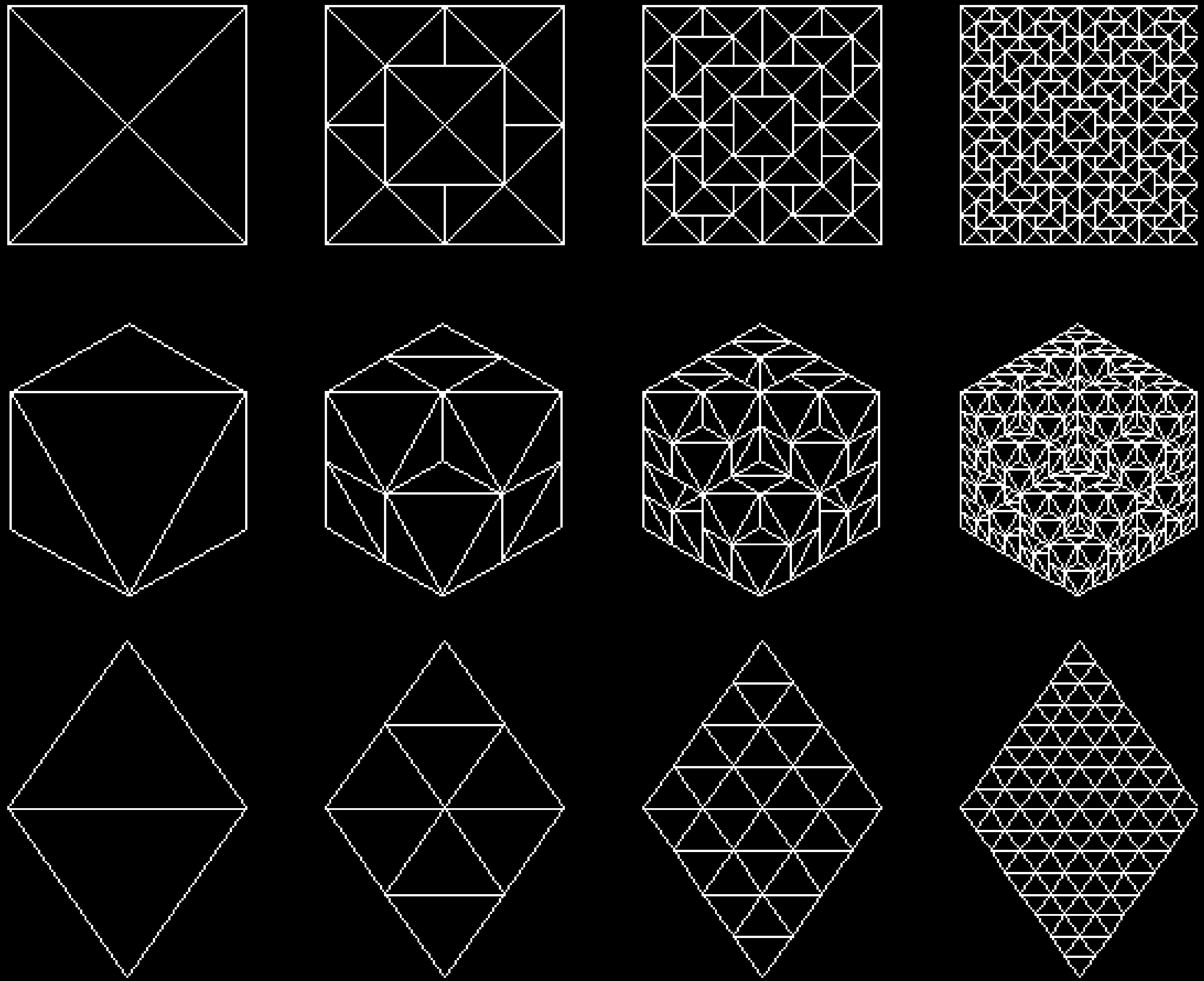
Kepler 1615: „Nova stereometria doliorum vinariorum".

"Als ich im vergangenen November eine neue Gattin in mein Haus eingeführt hatte, gerade zu der Zeit, da nach einer reichen und ebenso vorzüglichen Weinernte viele Lastschiffe die Donau herauffuhren und Österreich die Fülle seiner Schätze an unser Norikum verteilte, so dass das ganze Ufer in Linz mit Weinfässern, die zu erträglichem Preis ausgeboten wurden, belagert war, da verlangte es meine Pflicht als Gatte und guter Familienvater, mein Haus mit dem notwendigen Trunk zu versorgen. Ich ließ daher etliche Fässer in mein Haus schaffen und daselbst einlegen. Vier Tage hernach kam nun der Verkäufer mit einer Messrute, die er als einziges Instrument benutzte, um ohne Unterschied alle Fässer auszumessen, ohne Rücksicht auf ihre Form zu nehmen oder irgendwelche Berechnung anzustellen.

Er steckte nämlich die Spitze des Eisenstabes in die Einfüllöffnung des vollen Fasses schief hinein bis zum unteren Rand der beiden kreisförmigen Holzdeckel, die wir in der heimischen Sprache die Böden nennen. Wenn dann beiderseits diese Länge vom obersten Punkt des Fassrunds bis zum untersten Punkt der beiden kreisförmigen Bretter gleich erschien, dann gab er nach der Marke, die an der Stelle, wo diese Länge aufhörte, in den Stab eingezeichnet war, die Zahl der Eimer an, die das Fass hielt, und stellte dieser Zahl entsprechend den Preis fest.

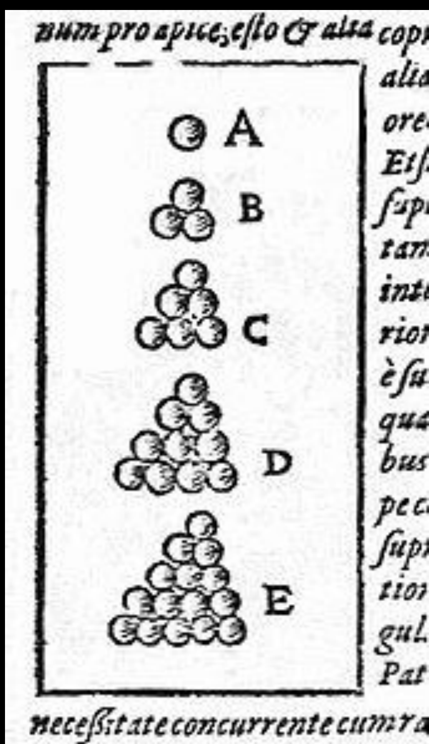
Mir schien es verwunderlich, ob es möglich sei, aus der durch den Körper des halben Fasses quer gezogenen Linie den Inhalt zu bestimmen, und ich zweifelte an der Zuverlässigkeit dieser Messung."

Keplersche Fraktale



Die Keplersche Vermutung = „Satz von Kepler“

Die Keplersche Vermutung ist die Vermutung, dass bei der **dichtesten Kugelpackung** im dreidimensionalen euklidischen Raum keine Anordnung von gleich großen Kugeln eine größere mittlere Dichte aufweist als die **kubisch-flächenzentrierte Packung** und die **hexagonale Packung**. Beide Packungen haben die gleiche mittlere Dichte von etwas mehr als 74 Prozent.



De nive sexangula 1611

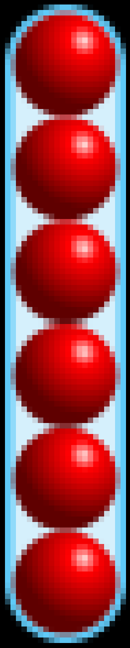
Problemstellung: Wie schichtet man Kanonenkugeln, damit sie im Inneren eines Schiffes möglichst wenig Platz (Volumen) einnehmen

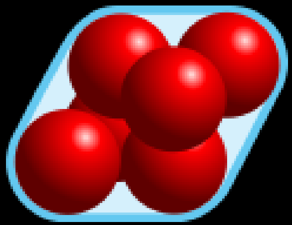
→ Packungsdichte: Verhältnis von Volumen der Kugeln zum Volumen des Behältnisses

Man muss unterscheiden:

Mit Begrenzung (Endliche Packung)
Ohne Begrenzung (ganzes $\mathbb{R}^3$) → Keplersche Vermutung

Endliche Kugelpackungen





Umhüllung = „konvexe Hülle“ bestimmt das Verpackungsvolumen

Wurst-, Pizza- und Clusterpackung

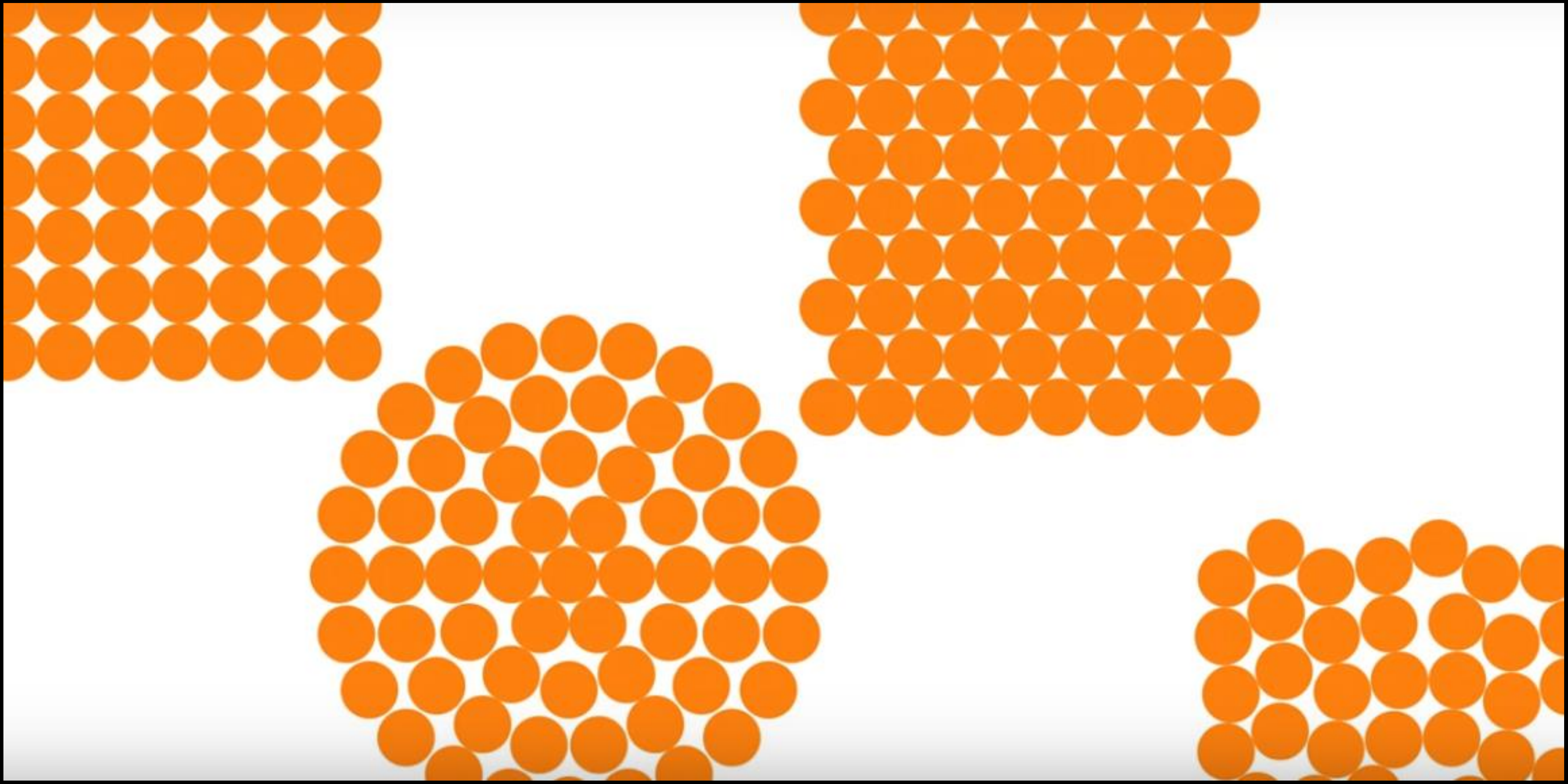
Suche nach der optimalen Verpackung – „wenig Luft“ zwischen Kugeln und Hülle

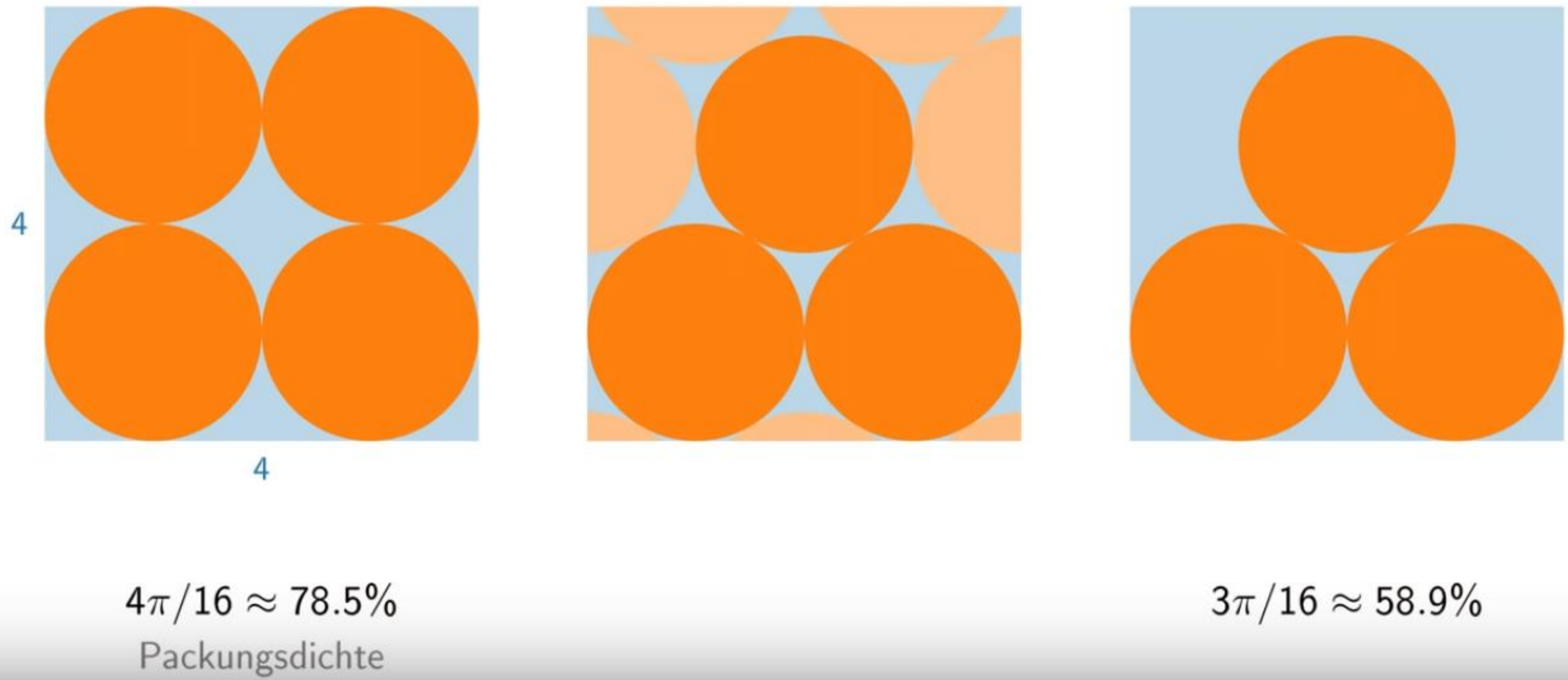
Ein oder zwei Kugeln bilden immer eine Wurstpackung. Mit drei Kugeln lässt sich auch eine Pizzapackung realisieren, die keine Wurstpackung darstellt. Ab vier Kugeln existiert auch eine clusterförmige Packung, die keine Pizzapackung darstellt.

Bewiesen ist, dass bis 4 Kugeln die Wurstpackung die optimale Packung ist. Man vermutet (ist noch nicht bewiesen), dass diese Aussage bis 55 Kugeln gilt. Ab 56 Kugeln ist auf jeden Fall die Clusterpackung besser → WURSTKATASTROPHE

Unendliche Kugelpackungen

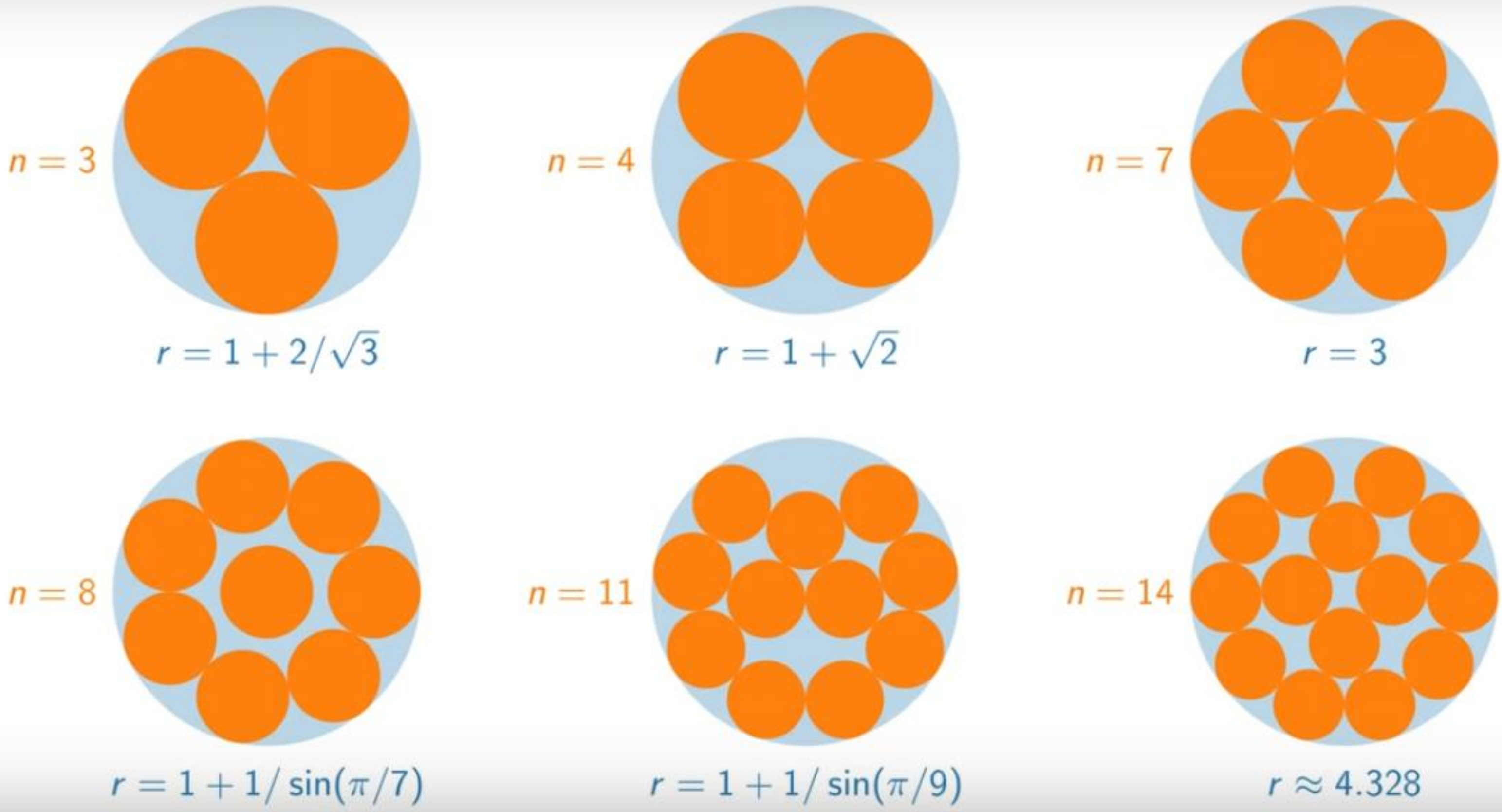
Wie füllt man eine Ebene mit Kreisen, so dass die Zwischenräume minimal werden?





Unterschiedliche Packungsdichten von Kreisen in Quadraten

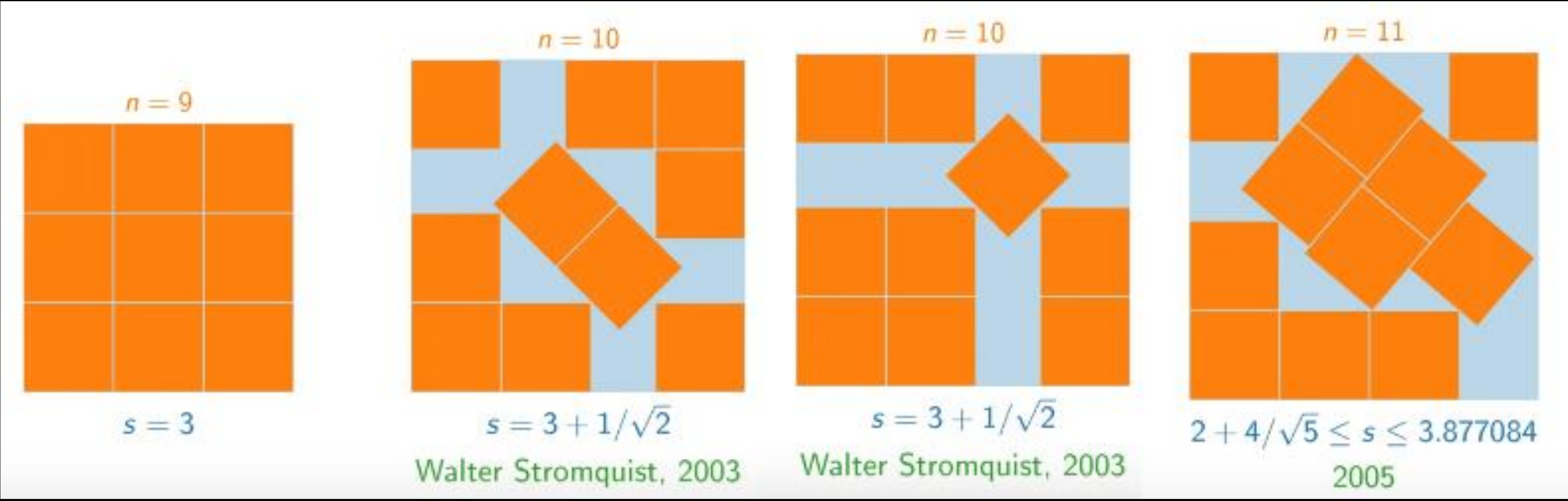
→ endliche Umhüllung



Aufgabenstellung: immer gleichgroße (orangene) Kreise

Wie groß ist der Radius des Hüllkreises r für verschiedene Zahlen (n) von Kreisen in dessen Inneren?

n=8 :   dass das die ideale Anordnung ist, konnte erst 1968 bewiesen werden (Udo Pirl)
n=11: erst 1994 bewiesen (Hans Melissen)
n=14: Beweis steht noch aus

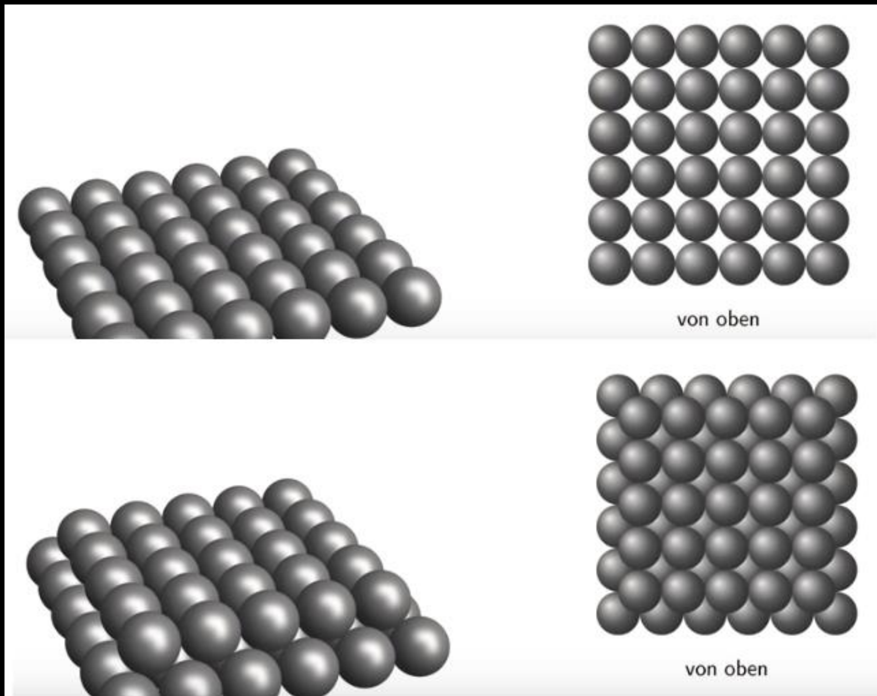


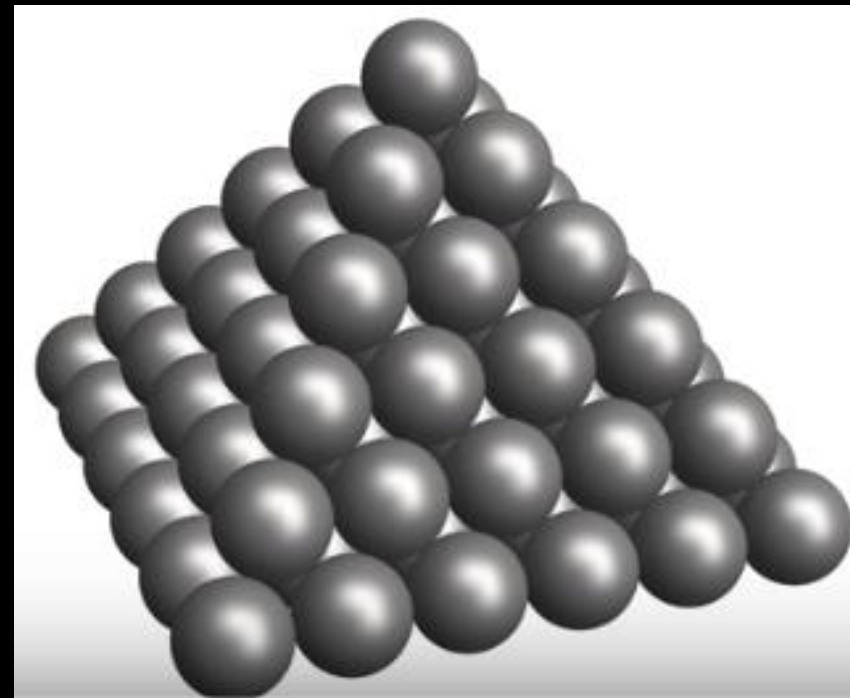
Aufgabenstellung: immer gleichgroße (orangene) Quadrate

Wie groß ist die Kantenlänge s des Hüllquadrats für verschiedene Zahlen (n) von Quadraten in dessen Inneren?

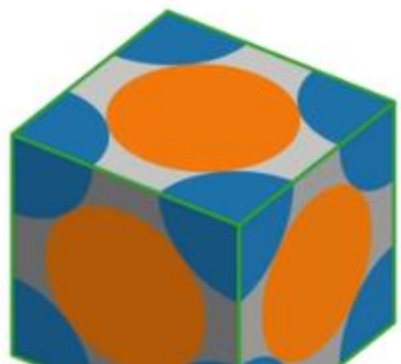
n=3 :   trivial
n=10 und n=11 äquivalent (2003 bewiesen durch Walter Stromquist)
n=11: Beweis steht noch aus, Schranken konnten aber mit Computer-Hilfe verbessert werden

Wie stapelt man Kugeln platzsparend?





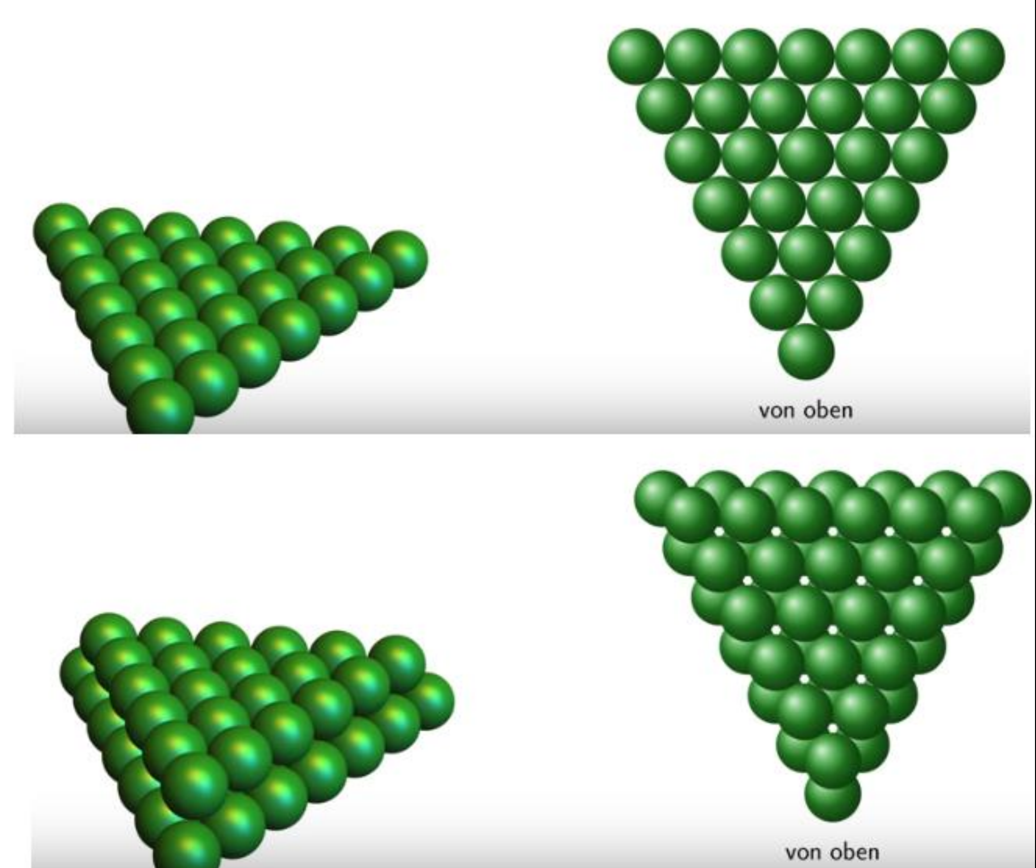
$$\frac{(6\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{8})\cdot\frac{4\pi}{3}}{(\sqrt{8})^3}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\approx 74.05\%$$

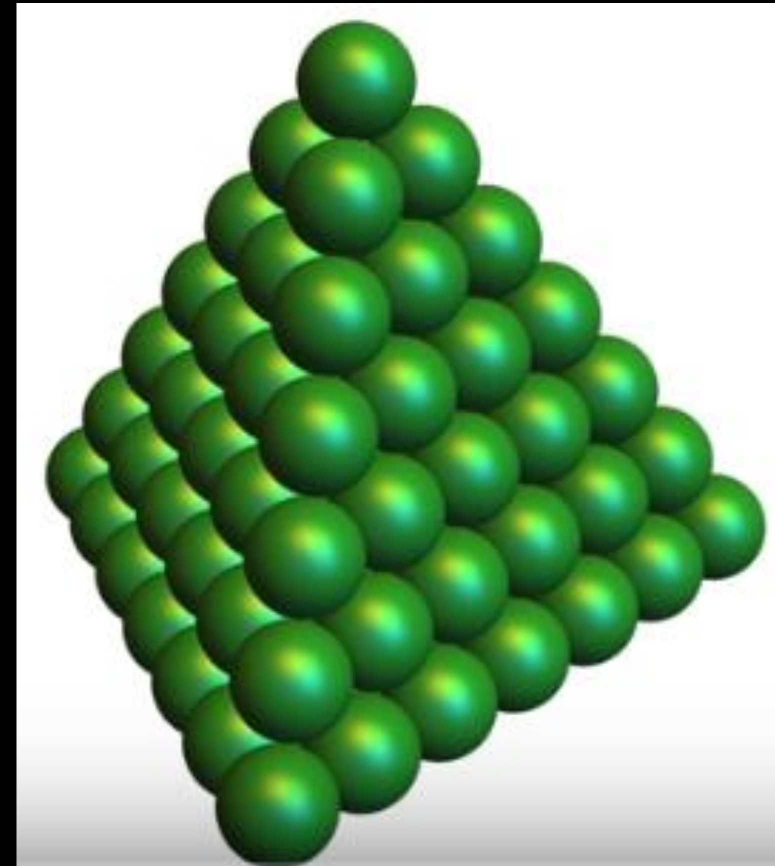


Packungsdichte

Quadratische Anordnung

Kubisch-Flächen-zentriertes Gitter





Diese Anordnung ist geometrisch der kubisch-flächenzentrierten Anordnung äquivalent und hat deshalb die gleiche Packungsdichte

Hexagonale Anordnung

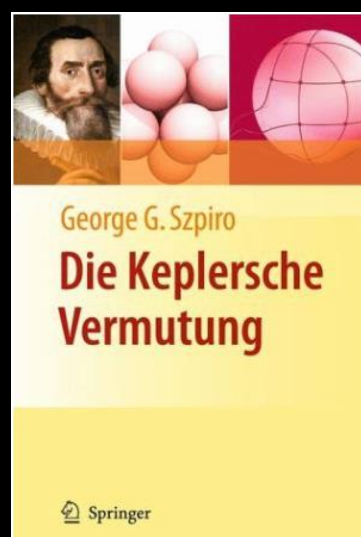
KEPLERSCHE VERMUTUNG

Es ist nicht möglich, mit Kugeln gleicher Größe eine höhere Packungsdichte als $\pi/3\sqrt{2}$ zu erreichen.

Der Beweis dieser Vermutung erwies sich als so schwierig, dass David Hilbert es mit in seine Liste der 23 ungelösten mathematischen Probleme („Hilbert-Probleme“) aufnahm:

Fragestellung: Gibt es nur endlich viele wesentlich verschiedene Raumgruppen im n-dimensionalen euklidischen Raum?

Der Beweis dieser Aussage, der die Keplersche Vermutung als Spezialfall enthält, gelang erst im Jahre 1998 / 2003 dem Mathematiker Thomas Callister Hales zuerst mittels Computermethoden (1998) und später formal (2003).



Zwischen der Formulierung der Vermutung und dessen exakten Mathematischen Beweises mussten 392 Jahre vergehen…

(es dauerte etwas länger als der Beweis der berühmten Fermatschen Vermutung