

Anwendung der Topologie in der Kosmologie

## Wie sieht das Universum aus?

Es geht hier um die topologische und geometrische Struktur des physikalischen Raumes und wie man sie durch Beobachtungen ermitteln kann.



Man muss unterscheiden:

- a) den physikalischen Ortsraum (3-dimensional, lokal euklidisch)
- b) den vierdimensionalen Ereignisraum (3+1-dimensional, lokal euklidisch) = „Raumzeit“

Der physikalische Raum ist eine der Erfahrung zugängliche Entität, dessen topologische und geometrische Struktur erforschbar ist.

Bevor man aber von einer „Struktur“ des physikalischen Raumes sprechen kann, muss man Begriffe definieren, mit der sich solch eine Struktur adäquat beschreiben lässt.

### **Mathematische Konzepte zur Beschreibung des physikalischen Raums**

- Punktmenge
- Kontinuum
- Topologie
- Metrik

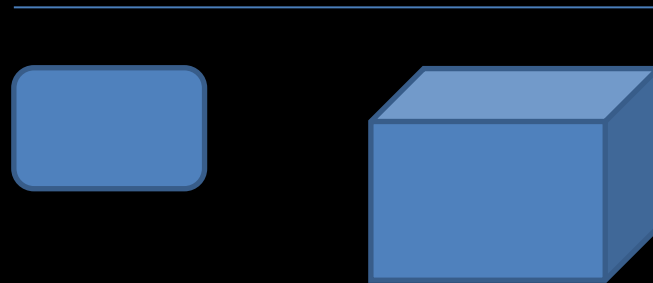
# Das Abstraktum „Raum“

Man kann einen Raum als eine Menge von Punkten, die lückenlos dicht liegen („Orte“), abstrahieren. Einer solchen Punktmenge kann eine Topologie aufgeprägt sein.

→ Topologischer Raum

Die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade bestimmt die Dimensionszahl des Raumes

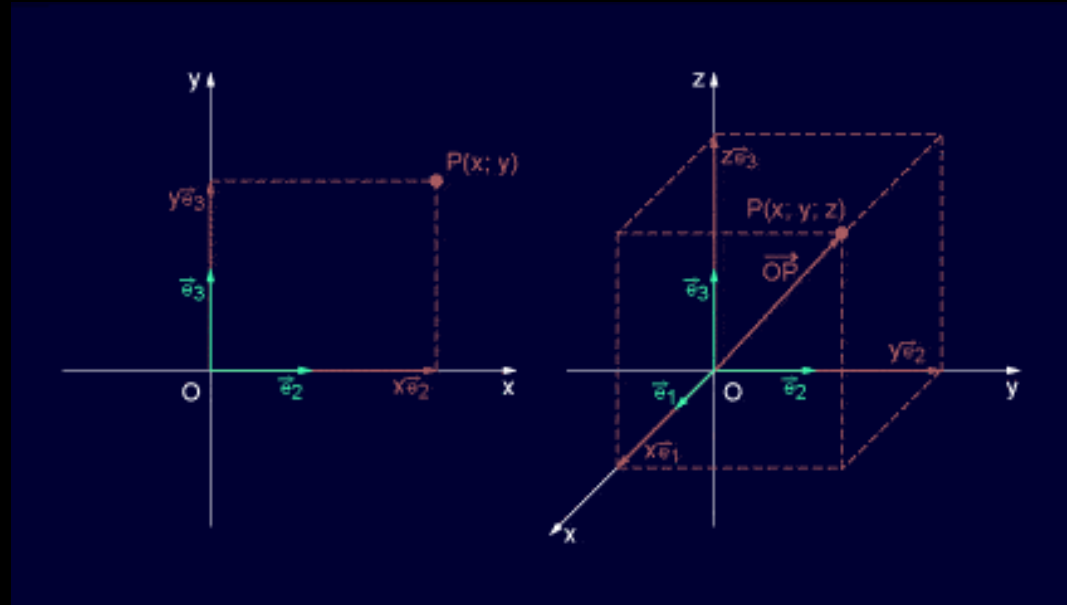
- n = 0 Punkt
- n = 1 Gerade
- n = 2 Fläche
- n = 3 Raum
- n = 4 4-dimensionaler Raum
- ...
- n = k k-dimensionaler Raum



Die „Punkte“ des Raumes werden in jede Koordinatenrichtung durch die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  (die lückenlos dicht liegen und von denen es in jedem Intervall  $[a, b]$  unendlich viele gibt – Kontinuum) dargestellt.

# Messen in Räumen – die Abstandsfunktion (Metrik) (\*)

1. Einheitslänge festlegen
2. Koordinatensystem festlegen
3. Nullpunkt festlegen



1-dimensionaler Raum: Abstand  $d$  zum Nullpunkt = absoluter Betrag:  $d(0, x) = |x|$

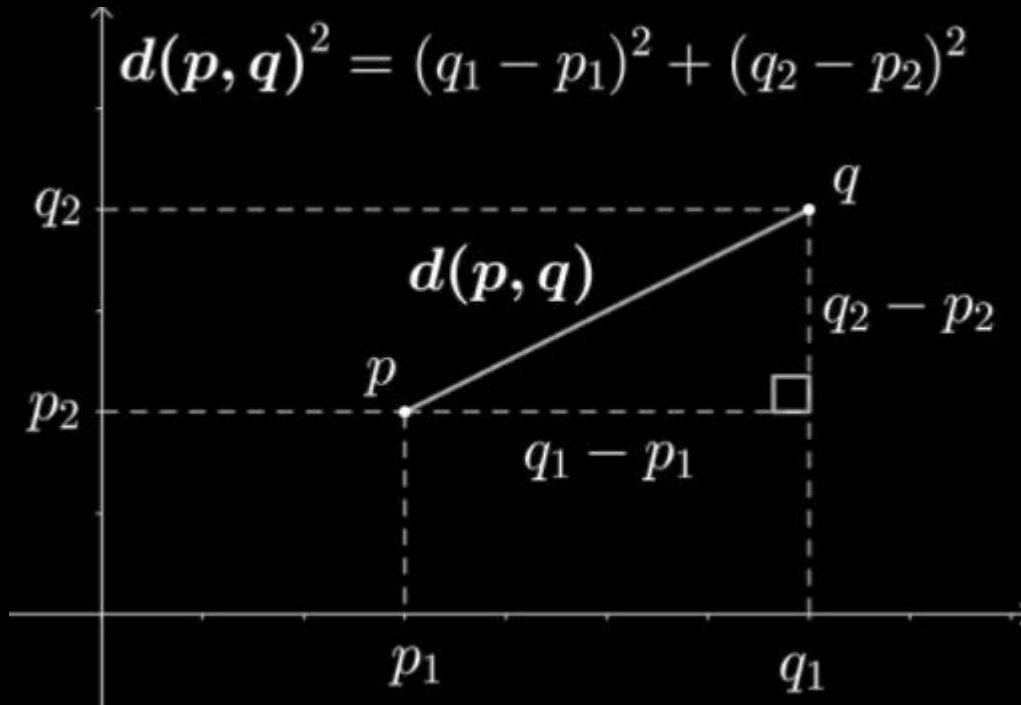
2-dimensionaler Raum: Abstand  $d$  zum Nullpunkt = Norm:

$$d(0, P(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|P(x, y)\|$$

3-dimensionaler Raum:  $d(0, P(x, y, z)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|P(x, y, z)\|$

(\*) griech. *metron* = Maß, Länge

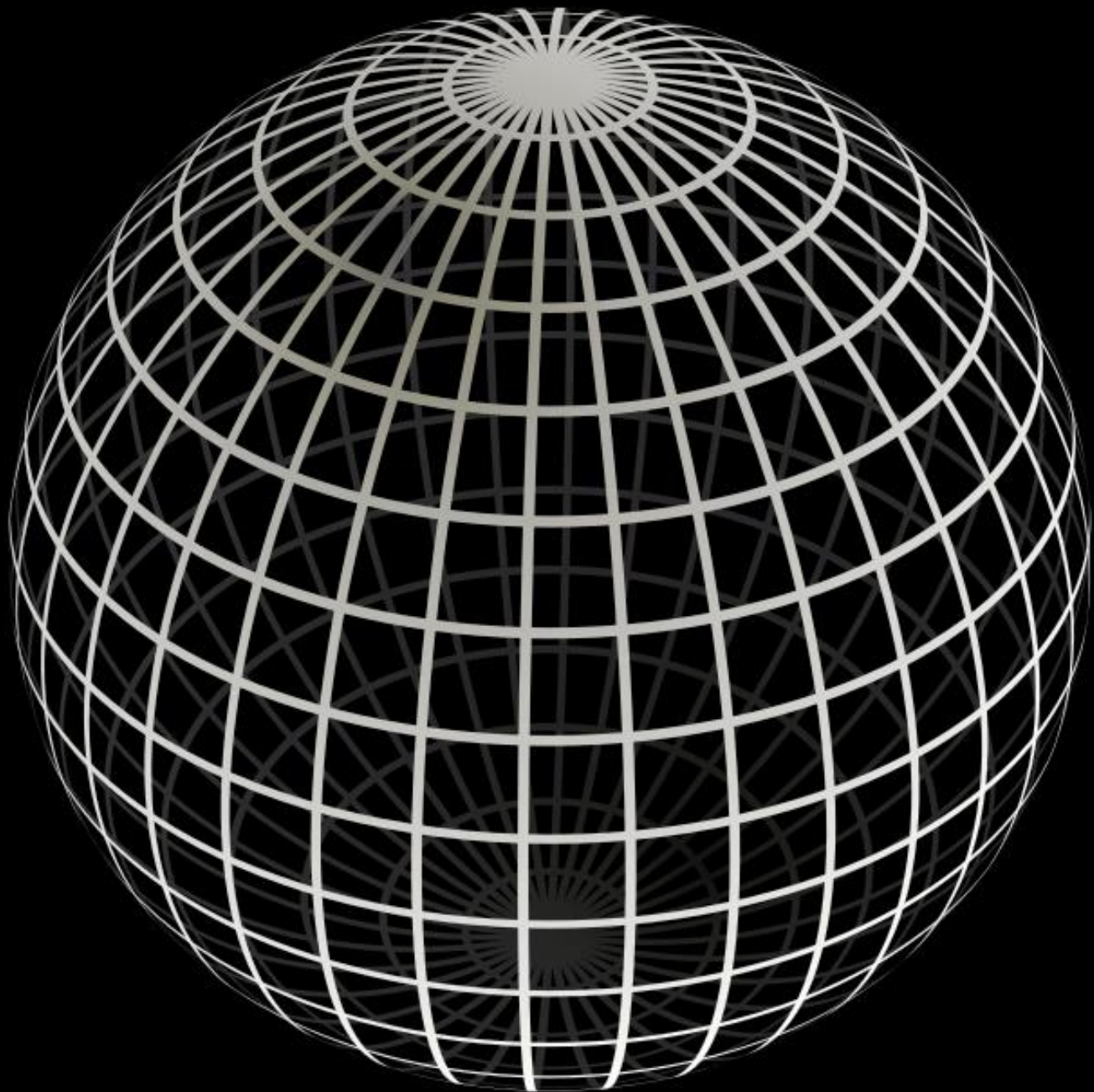
# Der Abstand zwischen zwei Punkten = Metrik



Beispiel:  $n=2$

$$d(p(x_p, y_p), q(x_q, y_q)) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} = \|p, q\|$$

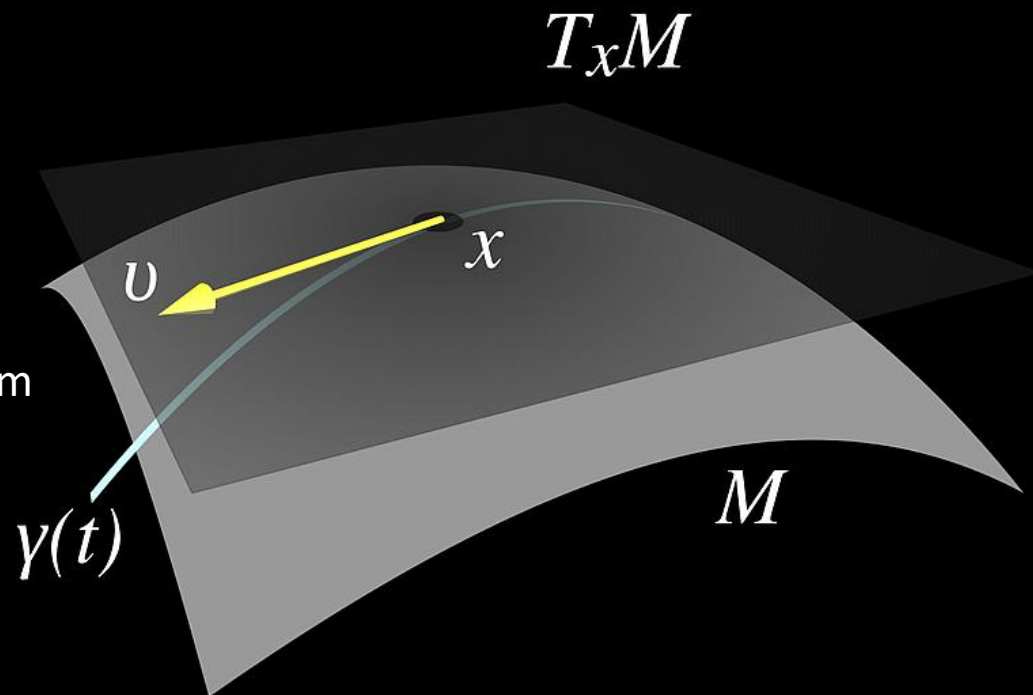
„Euklidische Metrik“



Die „Euklidische Metrik“ ist nur in Euklidischen Räumen gültig, d. h. in  $n$ -dimensionalen Räumen, in denen das Euklidische Axiomensystem gilt (z. B.  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ).

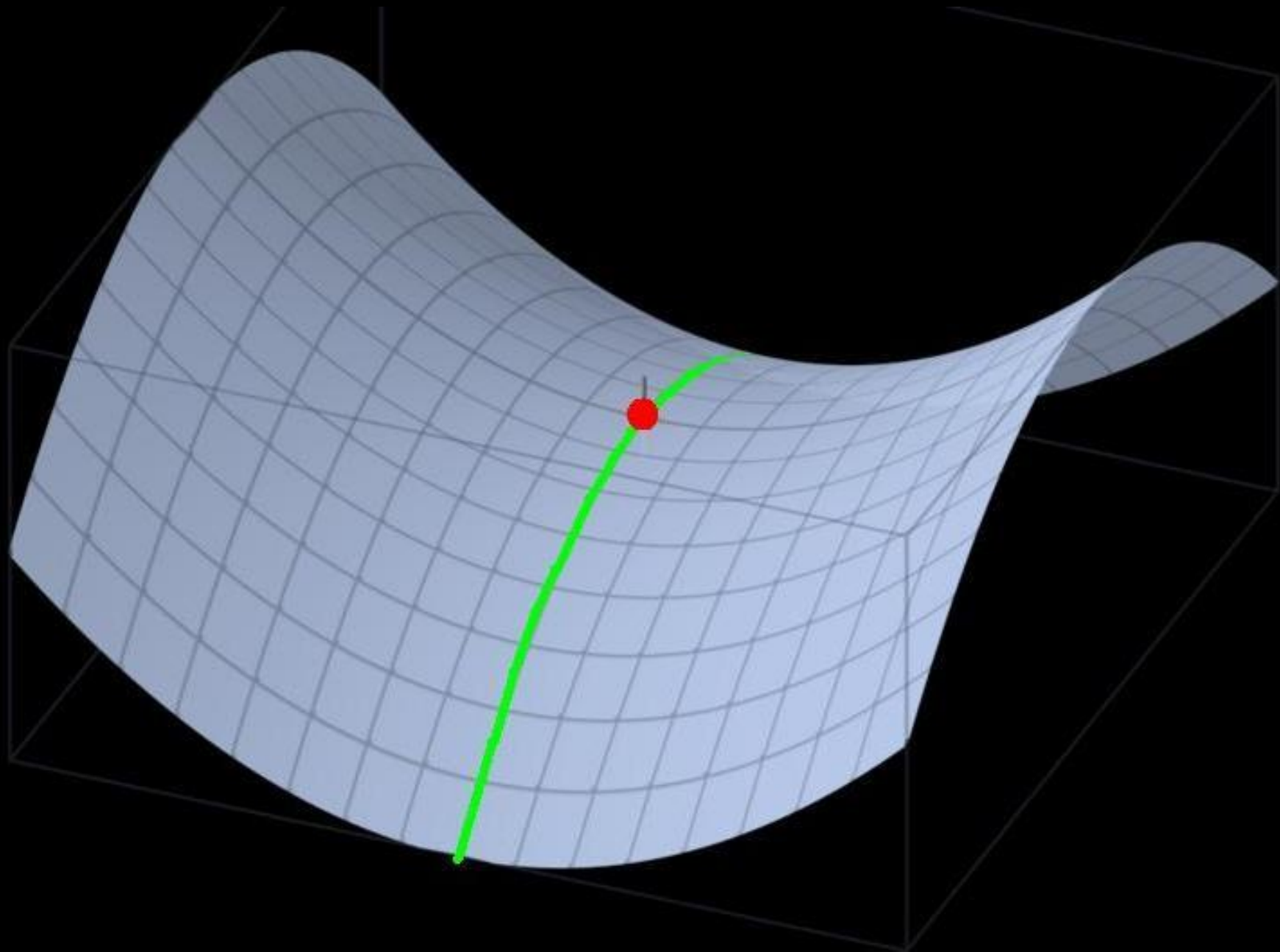
Tangentialraum

Man kann lokal zu einem Punkt  $x$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit einen Tangentialraum konstruieren, der eine Euklidische Metrik aufweist.



In „gekrümmten Räumen“ muss die Abstandsfunktion  $d(p,q)$  modifiziert werden.

→ Stichwort: Metrischer Tensor



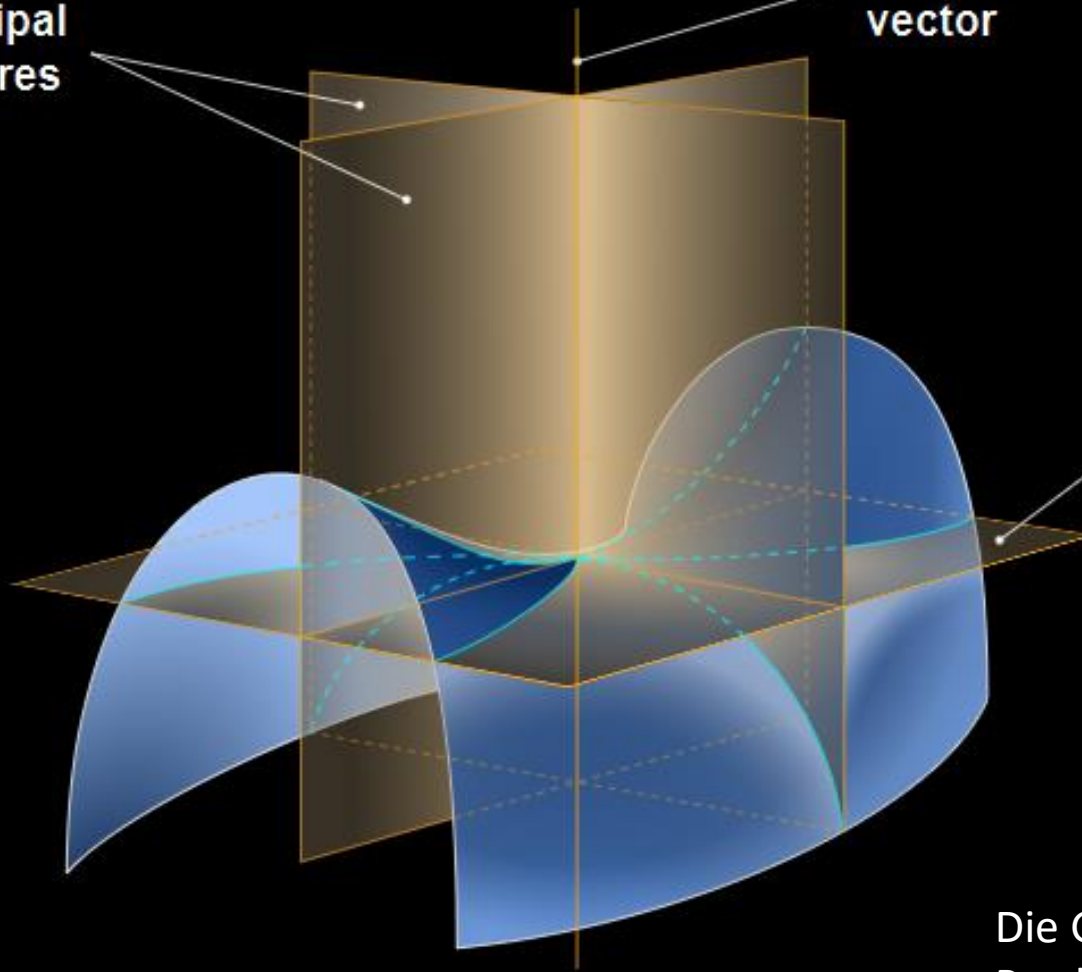


# Gaußsche Krümmung

planes  
of principal  
curvatures

normal  
vector

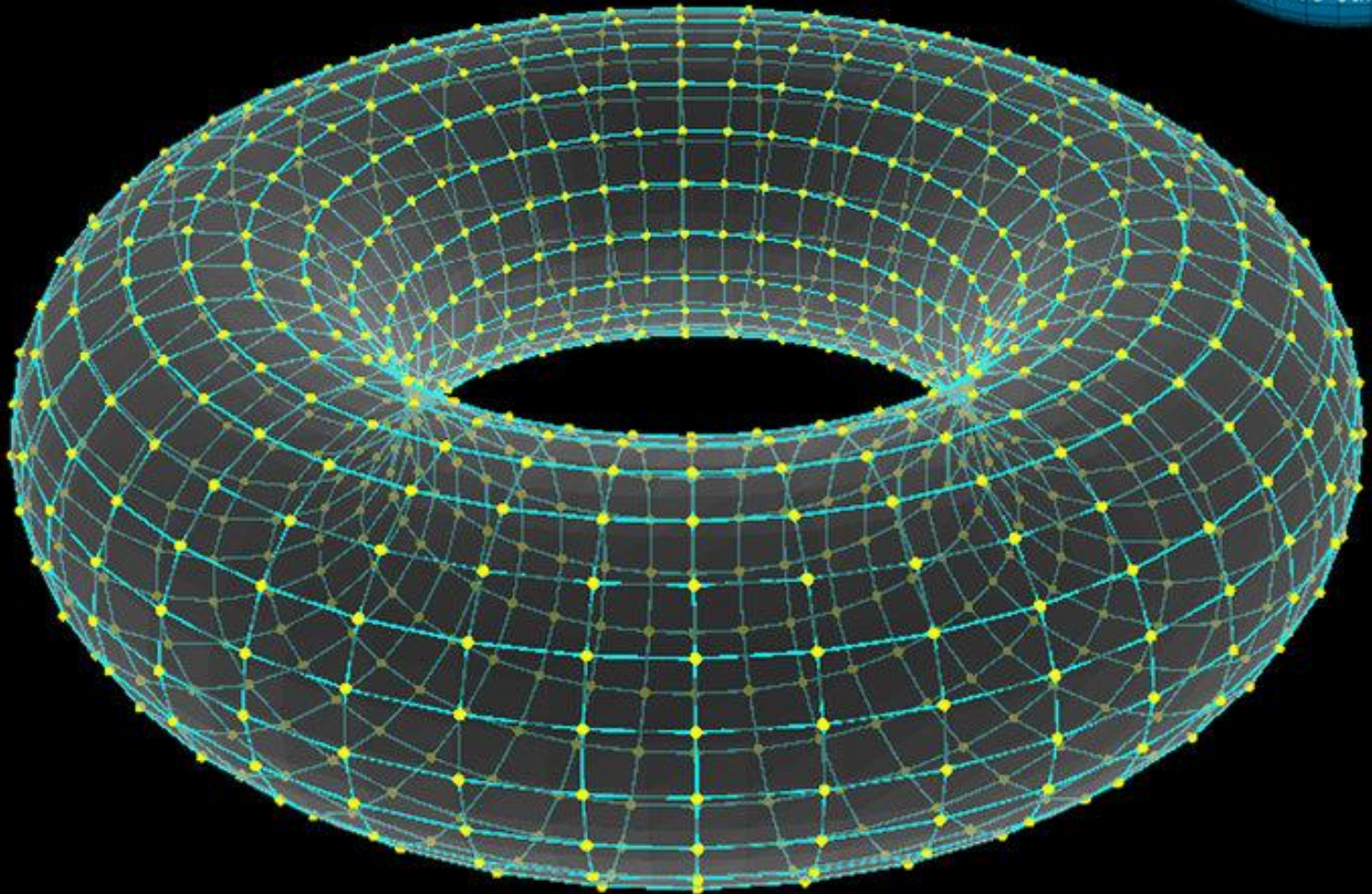
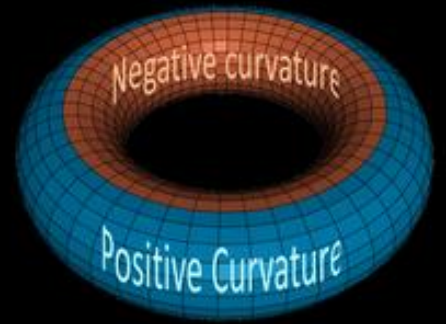
tangent  
plane



2 Normalebene

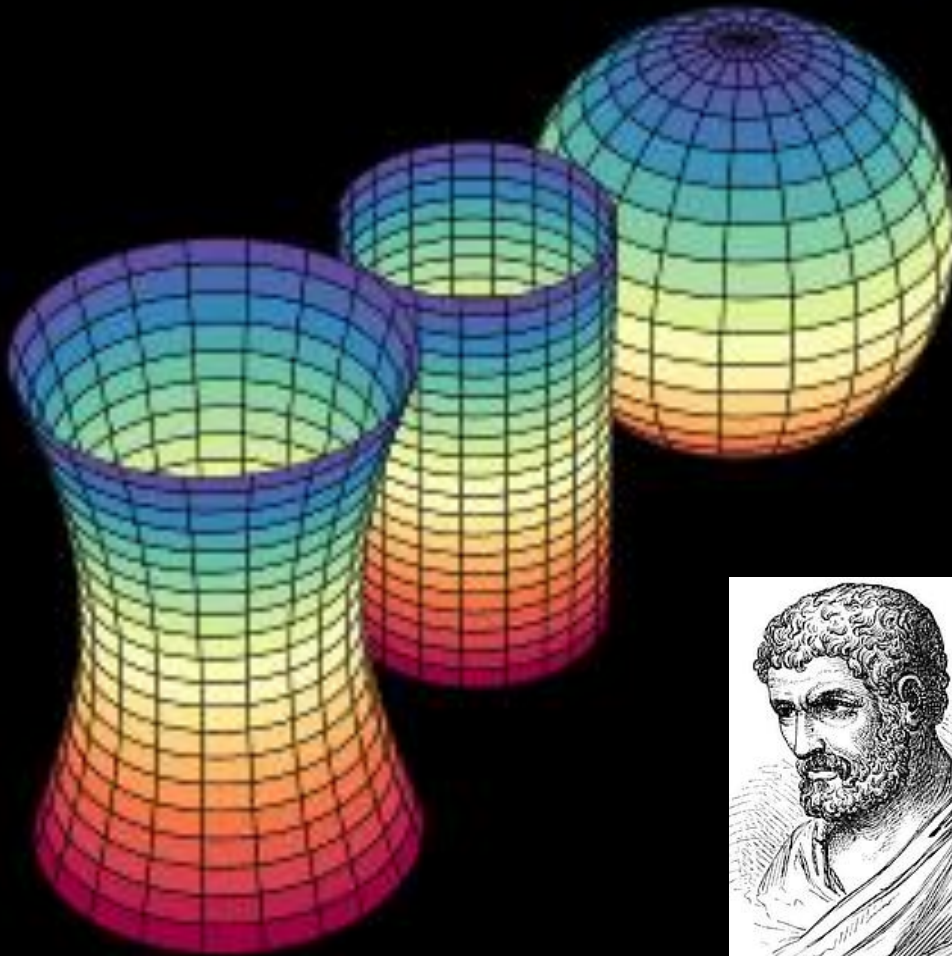
Die Gaußsche Krümmung ist das  
Produkt der beiden Haupt-  
krümmungen am Punkt P

# Gaußsche Krümmung Torus



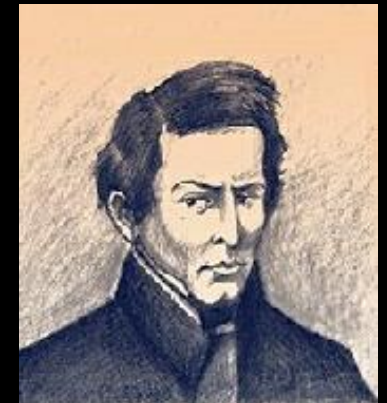
Ist die Gaußsche Krümmung überall gleich Null:  
Ist die Gaußsche Krümmung überall positiv:  
Ist die Gaußsche Krümmung überall negativ:

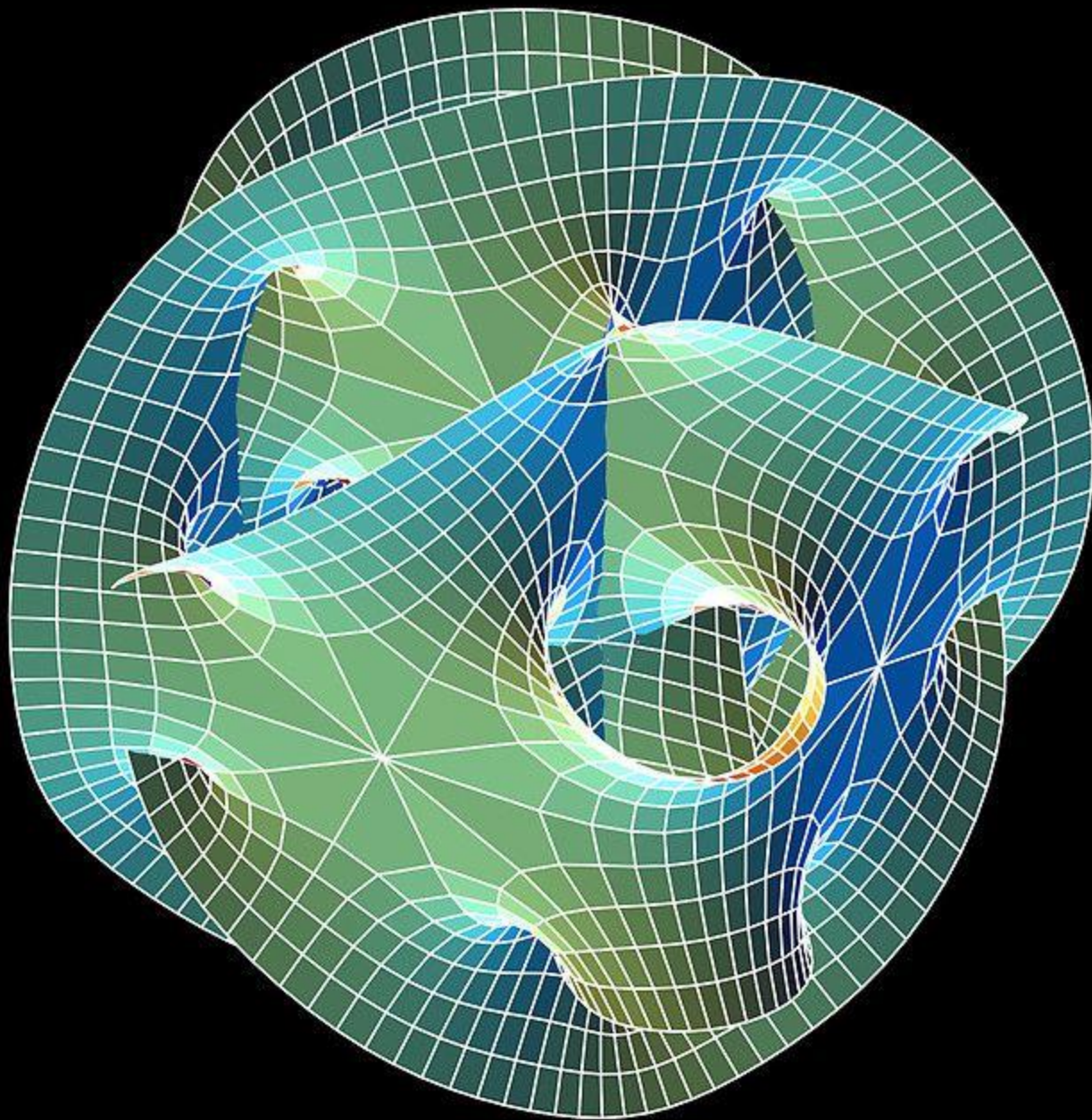
Euklidische Geometrie  
Sphärische oder Riemannsche Geometrie  
Hyperbolische oder Lobatschewskische Geometrie



Welche Geometrie hat der kosmische Raum (Universum)?

→ ist eine physikalische Frage!





## Isaak Newton (1687):

Raum und Zeit existieren unabhängig voneinander. Der Raum stellt dabei das „Behältnis“ dar, in dem das Weltgeschehen stattfindet und die Zeit ist dessen Ordnungsfaktor.

1. Der **absolute Raum** ist das postulierte Konzept eines physikalischen Raumes, der sowohl vom Beobachter als auch von den darin enthaltenen Objekten und den darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängig ist.
2. Die **absolute**, wahre und mathematische **Zeit** verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand. Sie wird mit dem Namen „**Dauer**“ belegt...
3. Ein Körper, auf dem keine **Kräfte** wirken, bewegt sich in einem **Inertialsystem geradlinig gleichförmig**
4. Die **Abweichung der Bewegung eines Körpers von geradlinig gleichförmiger Bewegung** ist proportional (in einem Inertialsystem) einer auf dem Körper wirkenden **Kraft**
5. Actio = Reactio: Die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern erfolgt durch **gegengleiche Kräfte**

# Newtonsche absolute Raum und Zeit

## Mathematisches Modell

- a) Raum: 3 Bewegungsfreiheitsgrade, 3 Rotationsfreiheitsgrade, Kontinuum, in alle Richtungen unendlich ausgedehnt, euklidische Metrik, völlig unabhängig von dem physikalischen Geschehen in ihm (d. h. er ist nichts anderes als eine Art „Behältnis“)
  
- b) Zeit: Die Zeit ist unendlich ausgedehnt und nur von einer Dimension. Kontinuum, Damit sind Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eindeutig festgelegt. Alle Zeitpunkte sind aus physikalischer Sicht gleichberechtigt, d. h. der „Zeitpfeil“ existiert in der klassische Mechanik nicht (jeder mechanische Vorgang in der Zeit ist auch in der Zeit umkehrbar).

Zwischen absoluten Raum und absoluter Zeit gibt es keinen Zusammenhang. Sie „existieren“ quasi unabhängig voneinander.

# Anmerkungen zum Newtonschen Axiomensystem

Das erste Newtonsche Axiom scheint ein Spezialfall des zweiten Axioms zu sein, nämlich der Fall, wo keine Kraft wirkt: Beschleunigung 0 → Bewegung geradlinig gleichförmig

→ aber das ist nicht die Intention des ersten Axioms. Es definiert vielmehr, was **geradlinig und gleichförmig** bedeutet. Eine Bewegung ohne Krafteinwirkung identifiziert „Geraden“ als Bahnkurven.

(Puck auf Eiskugel, Sand im Kosmos - Trajektorie)

→ **Problem:** Aufgrund der Omnipräsenz der Gravitation gibt es prinzipiell keine Bewegungen ohne Krafteinwirkung

(nur zwei Körper im Kosmos)

→ **Lösung des Problems:** Man betrachte die Gravitation NICHT als Kraft, sondern als „Krümmung“ der **Newtonschen RaumZeit**

→ „geradlinig gleichförmig“ im Raum wird zu „geradlinig“ in der RaumZeit

# Die Rolle einer Theorie in der „Welterklärung“

Eine Theorie ist im Allgemeinen eine durch Denken gewonnene Erkenntnis im Gegensatz zum durch Erfahrung gewonnenen Wissen.

In der Wissenschaft bezeichnet Theorie abweichend ein System wissenschaftlich begründeter Aussagen, das dazu dient, Ausschnitte der Realität und die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu erklären und Prognosen über die Zukunft zu erstellen.

Eine Theorie liefert Begriffe sowie den Bezugsrahmen, in dem man Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt einordnet und dessen Beziehungen untereinander sichtbar macht. Die Qualität einer Theorie wird daran gemessen, wie exakt sie Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt zu widerspiegeln vermag sowie in ihrer Vorhersagekraft in Bezug auf noch unbekannte Objekte und Prozesse (die dann wirklich empirisch in Experimenten nachgewiesen werden oder nicht).

Da die Alltagssprache zu unpräzise für derartige Aufgaben ist, nutzt man die Mathematik, um physikalische Objekte und Prozesse zu beschreiben.



Eine physikalische Theorie bedient sich mathematischer Modelle, um die Komplexität der realen Welt begrifflich handhabbar zu machen:

### Was ist ein „Modell“ ?

- Im Prinzip ist jede individuelle oder gesellschaftlich Wahrnehmung eine Theorie der Realität
- Religionen sind auch Modelle der Welt (= "Kosmologien")
- Wissenschaftliche Modelle kontrollieren ihre Gültigkeit scharf an der Realität (Experimente)
- **Mindestanforderung an ein Modell: Ein Modell muss die Realität quantitativ und qualitativ mit mindestens ausreichender Genauigkeit abbilden und eine annehmbare Prediktionsfähigkeit in der Zukunft haben**
- **Maximalforderung:** In der Theoretischen Physik wird sogar eine quantitative und qualitative Identität zwischen Modell und Realität gefordert.

In der physikalischen Theoriebildung wird stillschweigend davon ausgegangen, dass sich die „Realität“, wie sie sich der empirischen Forschung offenbart, von mathematischer Struktur ist und sich deshalb mit mathematischen Objekten abbilden lässt.



Realität

"Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen."

Mathematik

"In dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten."

"Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen."

# Mathematischer Raumbegriff – Physikalischer Raum

**Mathematische Räume** sind abstrakte Räume (d. h. Mengen mathematischer Objekte mit einer Struktur), die eine Topologie und eine metrische Struktur aufweisen.

Beispiele: Topologische Räume, metrische Räume, Vektorräume, spezielle Funktionenräume etc. pp.

Der **Perzeptible oder Wahrnehmungsraum** ist der den Sinnen zugängliche Erfahrungsraum, der quasi als „Behältnis“ wahrgenommen wird. Er ist dreidimensional und euklidisch.

Der **physikalische Ortsraum** stellt ein eindeutiges Bezugskonstrukt dar, dessen Topologie und Geometrie durch die Erfahrung zu ermitteln ist. In der modernen Physik bildet er zusammen mit der Zeit die sogenannte „**Raumzeit**“. Ihre globale topologische und metrische Struktur ist noch weitgehend unbekannt. Lokal ist sie jedoch quasi-euklidisch und mit dem Wahrnehmungsraum identisch.

Der **objektive Raum** ist der Raum, in dem die „Realität“ unabhängig von einem Beobachter stattfindet.

Mathematischer Raum

Perzeptibler Raum (Wahrnehmungsraum)

Konzeptioneller Raum (physikalischer Raum)

Objektiver Raum (real)



**Mathematisches Modell:**

Kontinuierliche Punktmenge mit aufgeprägter topologischer Struktur und Metrik

# Zusammenfassung „Raum“

- Ein Raum ist eine Mannigfaltigkeit von diskreten oder kontinuierlichen Raumpunkten
- Ein „Raum“ wird erst „messbar“ (d.h. Raumpunkte identifizierbar), wenn in ihm eine Metrik (in Form eines invarianten Abstandes  $ds$ ) definiert ist
- Die Metrik bestimmt die „Geometrie“ des Raumes, d.h. z.B. welches lokales oder globales Krümmungsmaß er besitzt
- Die Anzahl der voneinander unabhängigen „Richtungen“ im Raum nennt man seine Dimensionen (= Anzahl der Koordinatenachsen)
- Mathematische Räume können eine beliebige Dimension  $n$  besitzen
- Dimensionen können „verborgen“ sein (Kaluza-Klein-Räume)
- Die Zusammenhängeverhältnisse und das Verhalten von Räumen unter stetigen Transformationen wird durch die Topologie untersucht

## Newtonsche Physik:

Raum und Zeit werden als **absolute Bezugssysteme** gedacht. Ihre „Existenz“ erlaubt die Definition einer Dynamik.

# Newton'sche Kosmologie

## Prämissen

Raum und Zeit sind keine inhärenten Bestandteile der Newton'schen Physik. Sie sind a-priori gegeben und fungieren als „Behältnis“ und Parameter zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen. Sie sind auch keine Bestandteile der axiomatischen Begründung der Newton'schen Mechanik. Ihre Existenz ergibt sich als Denknöwendigkeit (Kant):

***Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.***

***Die absolute, wahre oder mathematische Zeit verfließt an sich und nach ihrer Natur ohne Beziehung auf irgend ein äußeres Ding gleichmäßig.***

# Eigenschaften des absoluten Raums:

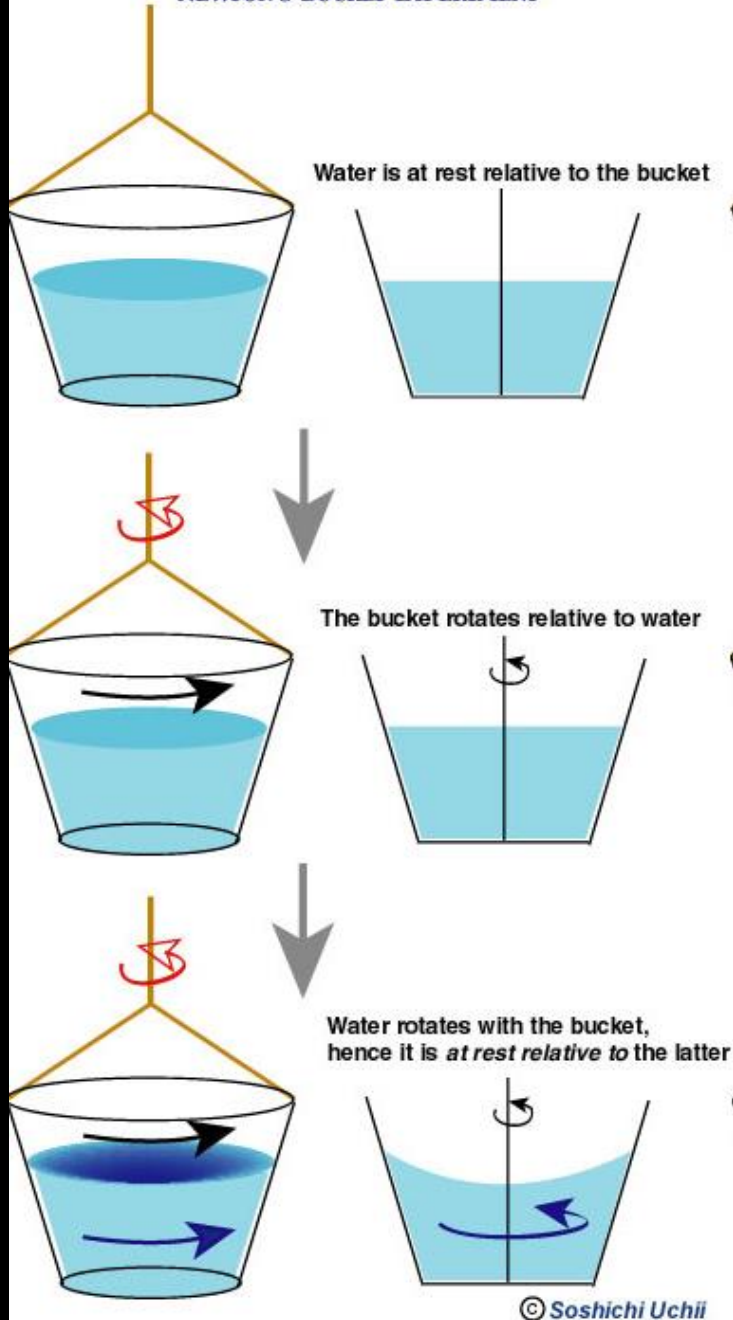
- er existiert unabhängig von den materiellen Körpern der Welt
- er definiert ein absolut ruhendes Koordinatensystem mit euklidischer Metrik und drei Dimensionen
- alle Bezugssysteme, die sich gleichförmig in Bezug auf den absoluten Raum bewegen, sind kräftefrei (Galileisches Relativitätsprinzip)
- Beschleunigungen erfolgen relativ zum absoluten Raum → Trägheitskräfte

**Problem:** (Ernst Mach, 1838-1916)

Sind „Raumpunkte“ ohne materielle Körper, die ein Koordinatensystem aufspannen, identifizierbar? (diese Frage wurde bereits von Leibnitz erörtert)

Wenn nein, wie kann dann eine Beschleunigung gegenüber dem „absoluten Raum“ Trägheitskräfte hervorrufen?

## NEWTON'S BUCKET EXPERIMENT



# Newton's Eimerexperiment

- Beweis für den absoluten Raum (?)
- E. Mach: „Beschleunigung gegenüber dem Sternhimmel“

- Keine Materie als Bezugspunkte
- Keine Beschleunigung
- keine Trägheitskräfte ...

Das „Eimerproblem“ ist bis heute noch nicht gelöst und Gegenstand weltweiter Forschung

→ Machsches Prinzip



## **Kritik des absoluten Raumes: Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716)**

Existiert der absolute Raum als Entität, d.h. als „Hintergrundsubstanz“ oder spannen erst die Relationen zwischen materiellen Körpern den „Raum“ auf?

### **Fragen über Fragen ...**

- Wo im „Raum“ befindet sich das Universum?
- Würde man es merken, wenn man das Universum z.B. 3 Meter nach Rechts im Raum verschiebt?
- Wenn man grundsätzlich nicht im Stande ist, den „Raum“ oder Veränderungen im „Raum“ zu entdecken, warum sollte man ihm „Existenz“ zubilligen?
- Verschwindet der absolute Raum, wenn alle materiellen Objekte aus ihm entfernt werden?

**Newton:** Der absolute Raum hat Konsequenzen

-> er erlaubt, **Bewegungsänderungen** relativ zu ihm zu messen

**Frage: Gibt es Alternativen zu dieser Auffassung?**

1. Newton betrachtet nur die relative Bewegung des Wassers in Bezug auf den Eimer

→ Relativgeschwindigkeit = 0

→ Oberfläche konkav

→ Rotation gegenüber dem absoluten Raum

2. Wieso liefert der absolute Raum nur einen Bezugspunkt gegenüber Beschleunigungen, jedoch nicht für gleichförmige Bewegungen?

Ernst Mach: Es gibt neben dem hypothetischen absoluten Raum auch noch natürliche Bezugspunkte, anhand der sich die Bewegung des Wassers im Eimer definieren lässt

→ der kosmische Raum mit all seinen Sternen und Galaxien

## Mach'sche Hypothese:

Wenn alle Himmelskörper aus dem kosmischen Raum entfernt werden, gibt es keine z.B. durch Rotation hervorgerufenen Beschleunigungen mehr.

→ die träge Masse verschwindet

## Machsches Prinzip:

Die träge Masse eines Körpers entsteht durch die Wechselwirkung dieses Körpers mit allen anderen Körpern im Weltall.

## Beobachtung:

Schwere Masse und träge Masse sind streng proportional zueinander

→ alle Körper fallen gleich schnell im Schwerfeld



**Albert Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie**

## Newton'sche Kosmologie vor 1905 ...

Die „Kosmologie“ war im Abendland maßgeblich theologisch geprägt. In der Vulgärtheologie war die Dreiteilung „Hölle“, „Erde“ und „Himmel“ die Grundlage der Weltsicht der abrahamitischen Religionen. Dante's *„La divina commedia“* von 1320 war eine gute Zusammenfassung dieser Weltsicht.

Mit der Entwicklung der modernen Naturwissenschaften (Descartes, Galilei, Newton etc.) begann man ein von Religionen unabhängiges Weltbild anhand allgemeiner philosophischer Prinzipien und von Beobachtungen zu entwickeln.

Zitat Pierre Simon de Laplace: *„Traité de Mécanique Céleste“*

Napoleon: *„Wo ist denn Gott in Ihrem Weltbild?“*

Laplace: *„Diese Hypothese, Sire, benötige ich nicht.“*

Die Astronomie im 17. und 18. Jahrhundert war im Grunde eine Astronomie des Sonnensystems. Die Vermessung des Sternhimmels diente im Wesentlichen dazu, Positionsbestimmungen von Planeten, Kometen und Planetoiden mit hoher Genauigkeit zu ermöglichen, um deren Bahnen berechnen zu können.

# Grundlagen und Prämissen einer Kosmologie, die auf der Grundlage der Newtonschen Mechanik beruht

## Modellannahmen:

Früher: absoluter Raum

Heute: topologischer Raum + Metrik

Früher: absolute Zeit

Heute: metrische Zeit (ohne Zeitpfeil)

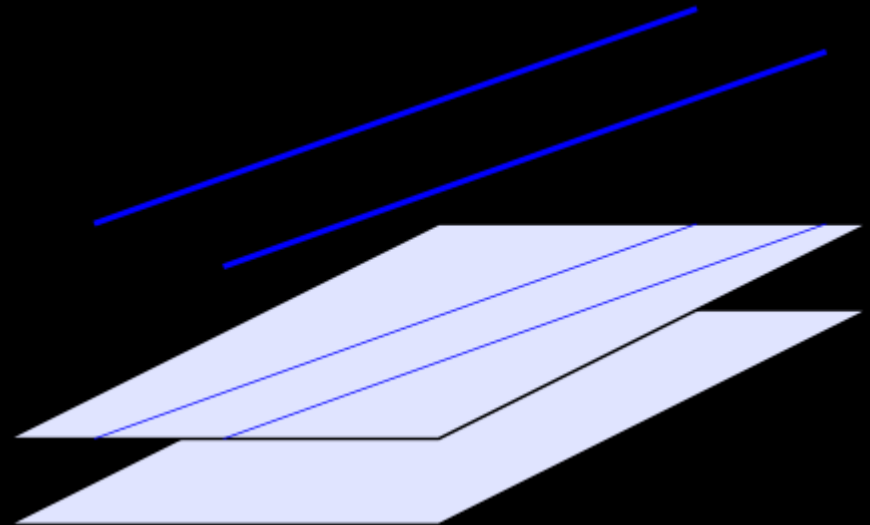
Die Newtonsche Mechanik lässt sich modern so darstellen, dass man sie auf der Grundlage verschiedener Topologien und darauf definierter Metriken formulieren kann. Die jeweiligen Vorhersagen lassen sich dann empirisch mit astronomischen Beobachtungen vergleichen und damit falsifizieren.

# 1. Topologien, die mit einer euklidischen Metrik vereinbar sind:

## Beispiel im $\mathbb{R}^2$ :

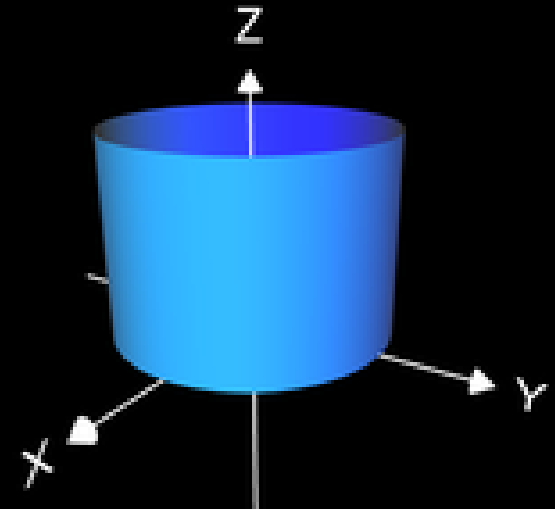
in  $x$  und  $y$  unendlich ausgedehnte Ebene, in der das Euklidische Parallelenaxiom gilt.

homogen + isotrop



Fläche eines in eine Richtung unendlich ausgedehnten Zylinders.

homogen



Da der physikalische Raum dreidimensional ist, müssen in der theoretischen Beschreibung natürlich die dreidimensionalen Analoga von „unendlich ausgedehnter Ebene“ oder „unendlich ausgedehnter Zylinder“ zum Einsatz kommen. Beide weisen eine euklidische Metrik auf.

## Der Euklidische Raum als Modell des „Kosmischen Raumes“

1. Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen.
2. Man kann eine Strecke kontinuierlich zu einem Strahl verlängern.
3. Um jeden Punkt kann man einen Kreis mit beliebigem Radius zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. (Parallelenaxiom): Wenn eine Strecke zwei andere Strecken derart schneidet, so dass die beiden inneren Schnittwinkel auf der einen Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, dann schneiden sich die beiden Strecken, wenn sie weit genug verlängert werden, auf der Seite, auf der die Schnittwinkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

## Grundannahme:

Der kosmische Raum stellt eine dreidimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit dar, die in alle Raumrichtungen unendlich weit ausgedehnt sowie homogen und isotrop ist .

## Kosmologisches Prinzip

- Das Weltall ist **homogen** – d. h., es stellt sich einem Beobachter unabhängig von seinem Standpunkt im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Homogenität**, auch “Kopernikanisches Prinzip“ genannt).
- Das Weltall ist **isotrop** – d. h., es stellt sich dem Beobachter unabhängig von der Beobachtungsrichtung im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Isotropie**).

Das Prinzip der Homogenität impliziert, dass die Sterne (heute würde man sagen, Galaxien) gleichmäßig, d. h. überall mit der gleichen räumlichen Dichte, im unendlichen Universum verteilt sind.

## Symmetrieprinzipien und mechanische Erhaltungssätze

Homogenität des Raumes impliziert Impulserhaltung

Isotropie des Raumes impliziert Drehimpulserhaltung

Homogenität der Zeit impliziert Energieerhaltung

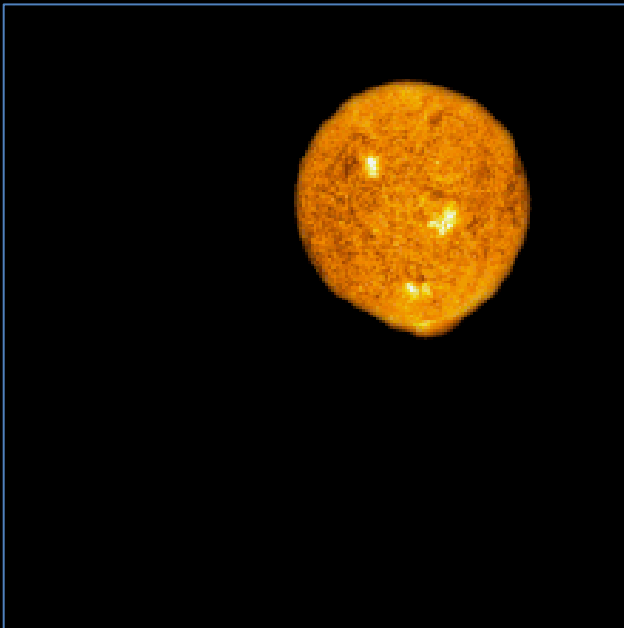
Noether-Theorem



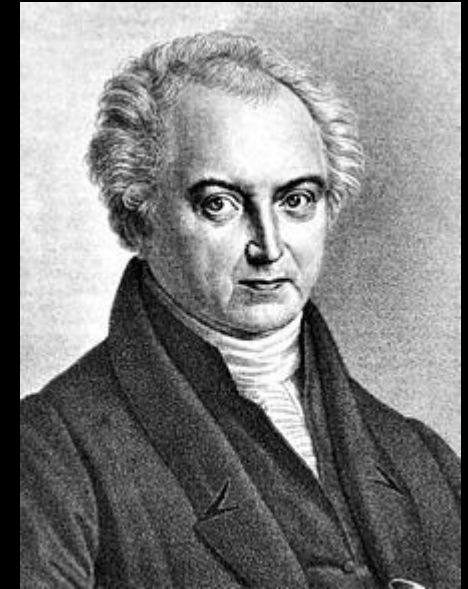
*„Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander, oder in Milchstrassen-Systeme vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und da müsste der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden.“*

**Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758 -1840 )**

## Olbersches Paradoxon



- Sterne haben eine endliche Ausdehnung und Leuchtkraft
- Anzahl der Sterne nimmt mit  $R^3$  zu
- Statisches Universum



Das Olberssche Paradoxon ist ein ernstzunehmender Test für kosmologische Theorien

# Stabilität eines unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universums

Hugo von Seeliger (1849-1924)

Aufgrund der gravitativen Anziehung führt jede zufällig erfolgte Massenkonzentration zu einem Gravitationskollaps. Ein unendlich ausgedehntes und homogen mit Sternen erfülltes Universum ist per se instabil.



**Lösung:** Man muss die Materie im Kosmos hierarchisch verteilen

Hierarchisches Weltmodell von Carl Charlier (1908 und 1922)

Fraktales Weltmodell nach Benoit Mandelbrot (1977)

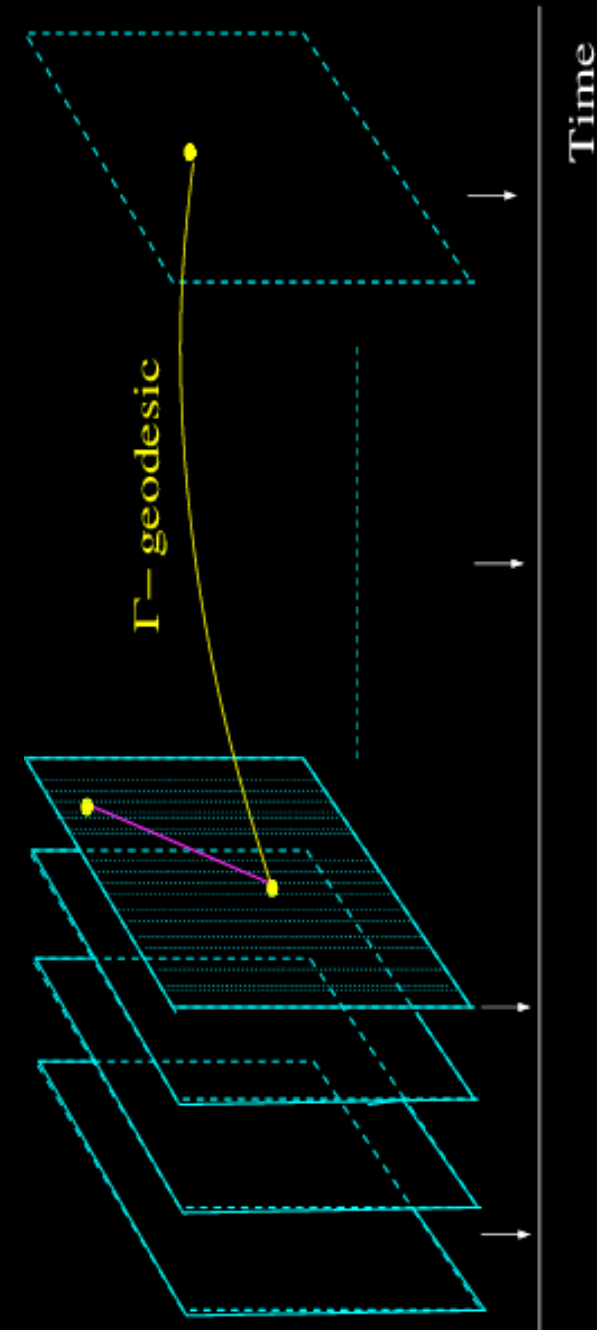


# Die Newtonsche Mechanik ist eine deterministische Theorie

Da die Bewegungsgleichungen deterministisch und reversibel sind, ist jedes Ereignis in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft vorbestimmt:

## „Laplace'scher Dämon“

*„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.“*



# Newtonsches Blockuniversum

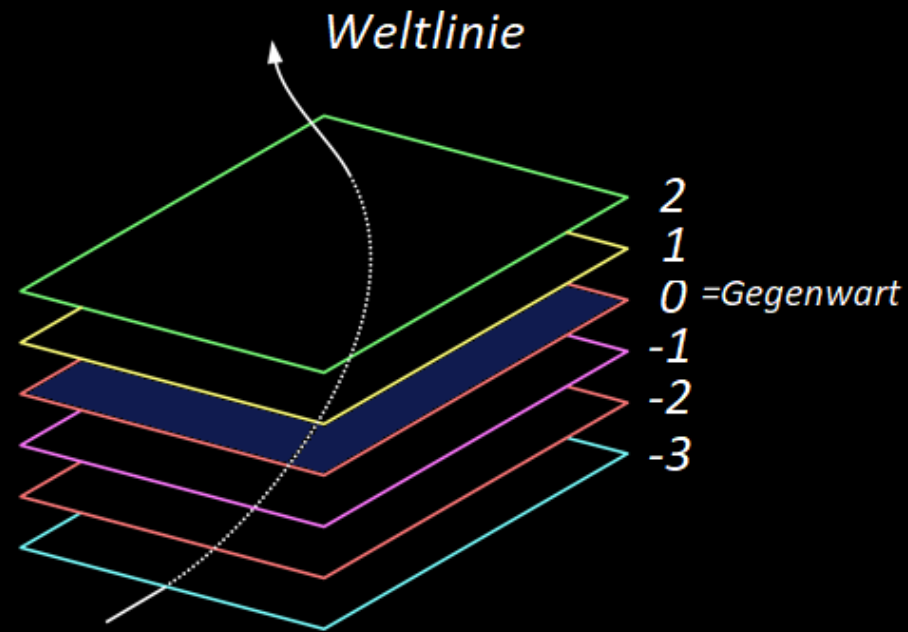
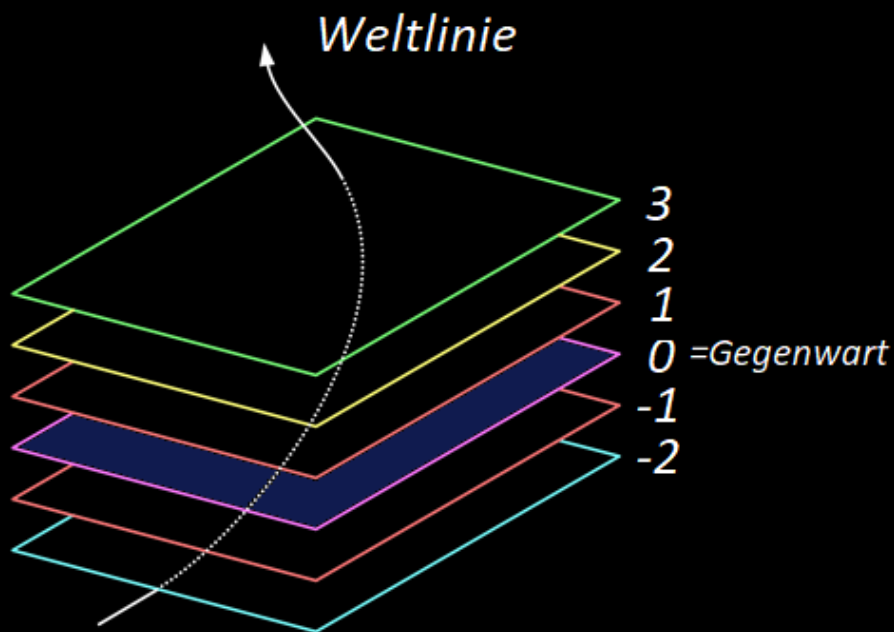
Man kann sich das Newton'sche Universum als eine Art „Daumenkino“ vorstellen, bei der jede Karte einen Augenblickszustand der Welt darstellt. Dabei ist der „Augenblick“ „Gegenwart“ derart ausgezeichnet, dass alle Karten (= „Zeitschnitte“) darunter die „Vergangenheit“ und alle Karten darüber die „Zukunft“ darstellt. Dabei „bewegt“ sich der Augenblick „Gegenwart“ gleichmäßig Zeitschnitt um Zeitschnitt in Richtung Zukunft.



Im Newtonschen Blockuniversum ist die Zukunft vollständig determiniert (Stichwort: Laplacescher Geist) - d. h. alles, was passiert, ist vorbestimmt

Im Newtonschen Blockuniversum ist eine „Zeit“ auf der Zeitachse ausgezeichnet . Es ist der „Augenblick“. Alle Ereignisse  $(x,y,t)$ , die auf der Augenblicks-Zeitscheibe liegen, sind gleichzeitig.

Die „Bewegung“ eines Körpers durch das Blockuniversum ist eine Folge von Ereignissen, die von Zeitscheibe zu Zeitscheibe wandern → Weltlinie

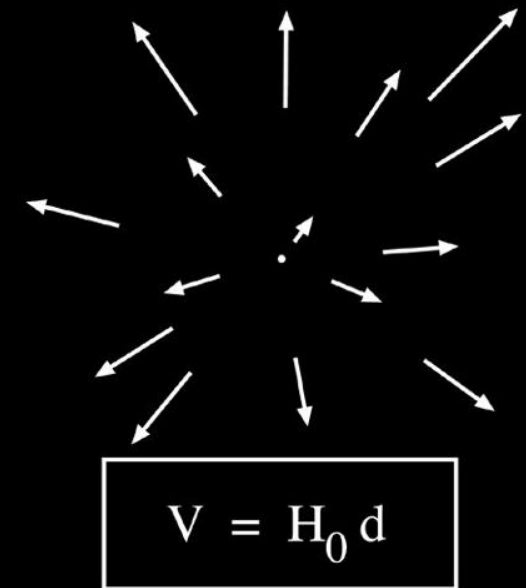
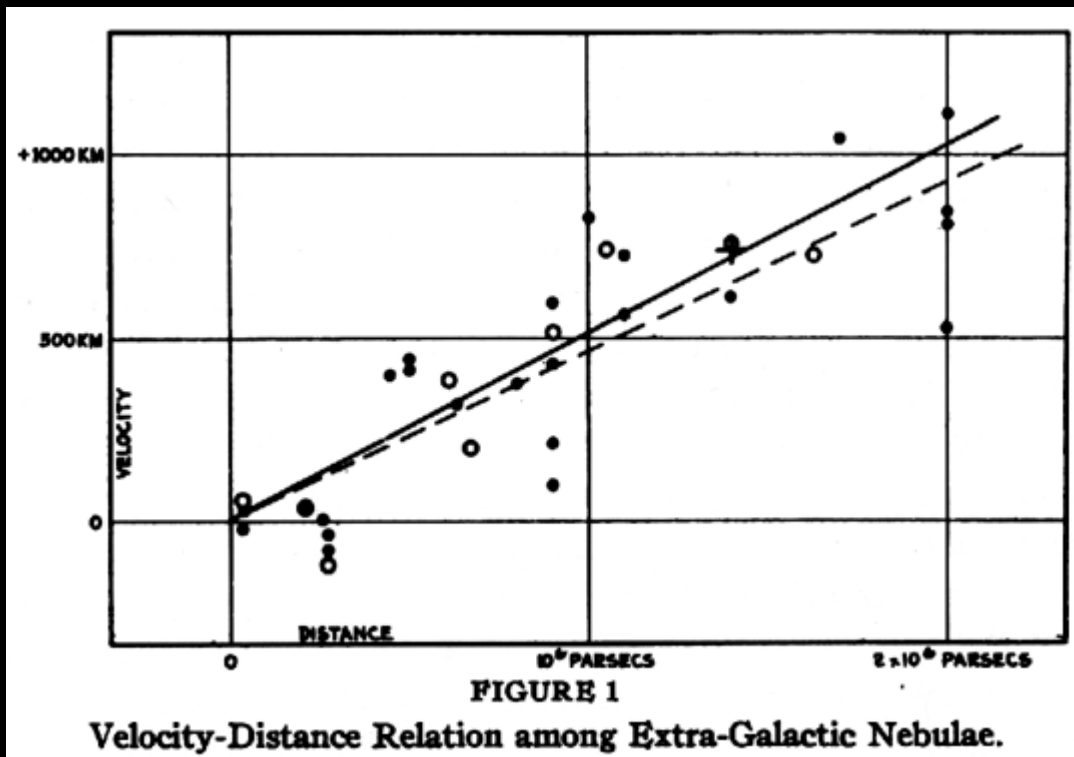


# Newtonsches Blockuniversum

- Unendlich ausgedehnter euklidischer Raum mit homogener und isotroper Materieverteilung („Kosmologisches Prinzip“)
- Raum und Zeit werden als kontinuierlich angesehen (es gibt keine kleinste Raum- und Zeitintervalle)
- Weltlinien von gleichmäßig gleichförmig bewegten Körper sind Geraden im Newtonschen Blockuniversum
- Weltlinien von beschleunigt bewegten Körpern sind stetige, gekrümmte Kurven im Newtonschen Blockuniversum
- Jede „gerade“ Weltlinie ist Repräsentant eines Inertialsystems. Sie kennzeichnen kräftefreie Bewegungen. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt und lassen sich über die Galilei-Transformationen ineinander überführen.
- Es gibt in der Newtonschen Physik keine maximale Grenzgeschwindigkeit (instantane Ausbreitung von Signalen)

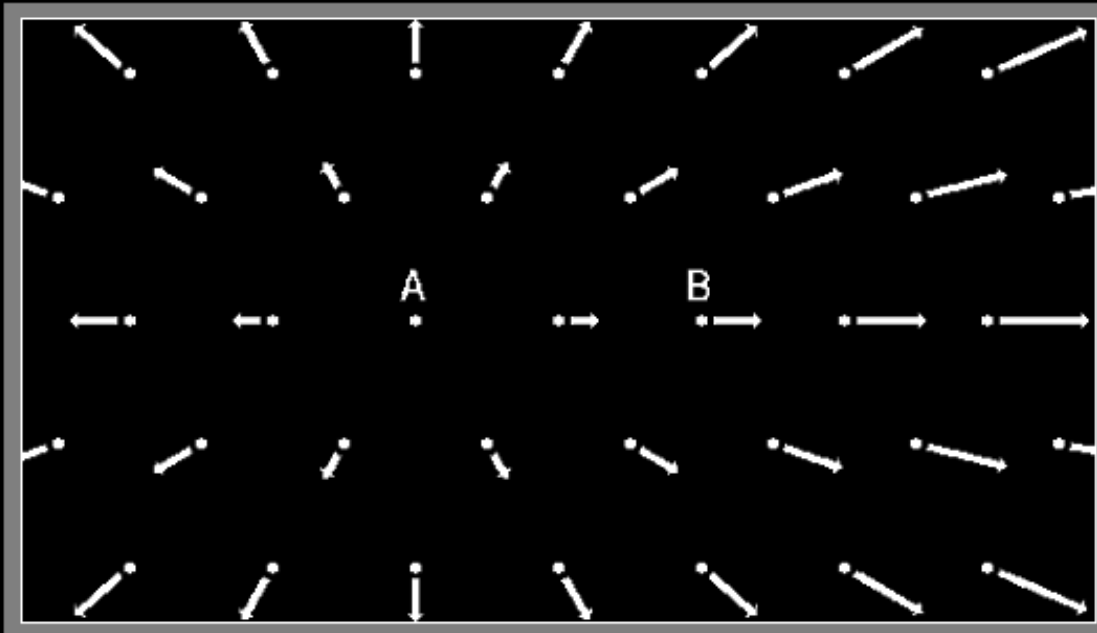
# Kosmische Expansion

Um 1915 stellt Vesto Slipher (1875-1969) am Lowell Observatory in Arizona fest, dass bei 11 der von ihm untersuchten 15 Galaxien sogenannte "spektrale Rotverschiebungen" zu verzeichnen waren. 1929 entdeckte dann Edwin Hubble (1889-1953), dass es einen Zusammenhang zwischen der anhand von Cepheiden ermittelten Entfernung von Galaxien und deren Rotverschiebung gibt und zwar in dem Sinn, dass je größer die Rotverschiebung, desto größer die Entfernung der entsprechenden Galaxie.



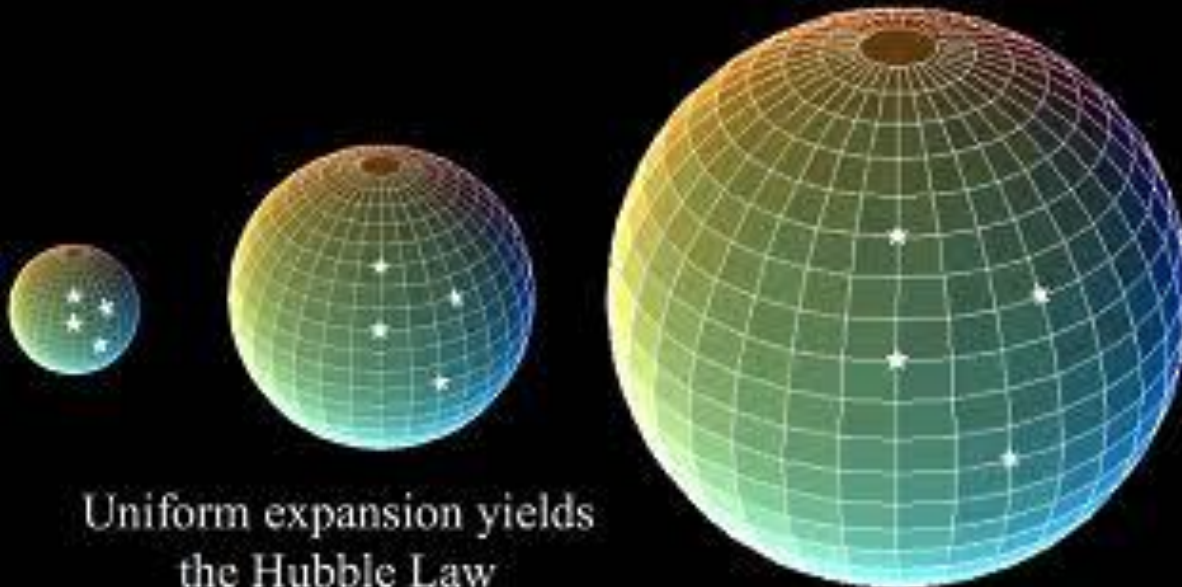
Hubble-Gesetz





Hubble-Fluss

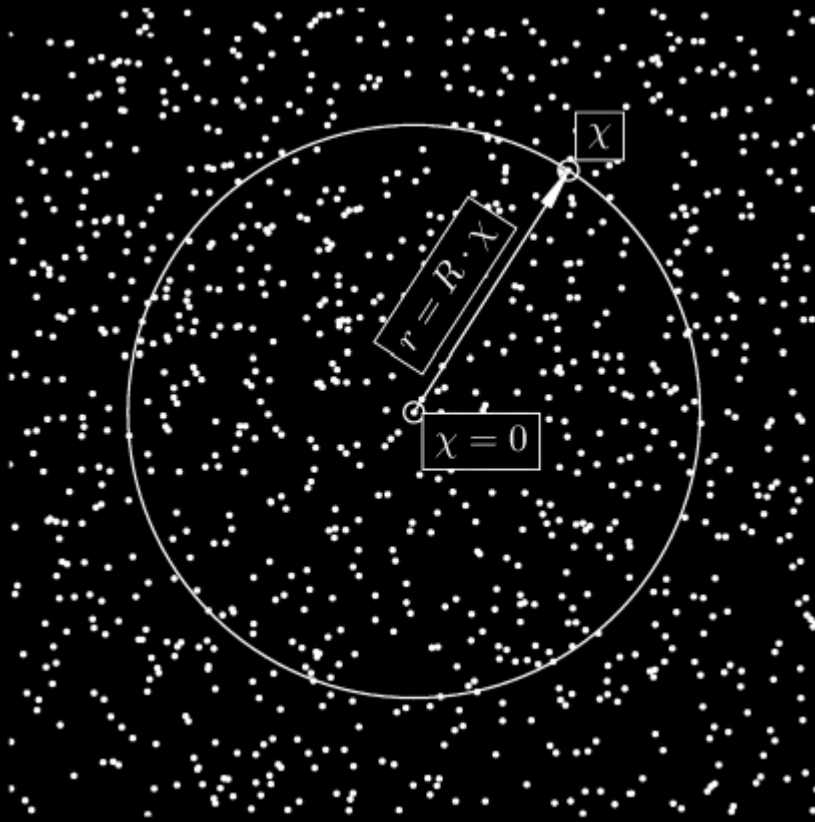
Euklidische Ebene



Kugeloberfläche

Uniform expansion yields  
the Hubble Law

# Lässt sich die kosmische Expansion im Rahmen der Newtonschen Mechanik beschreiben?



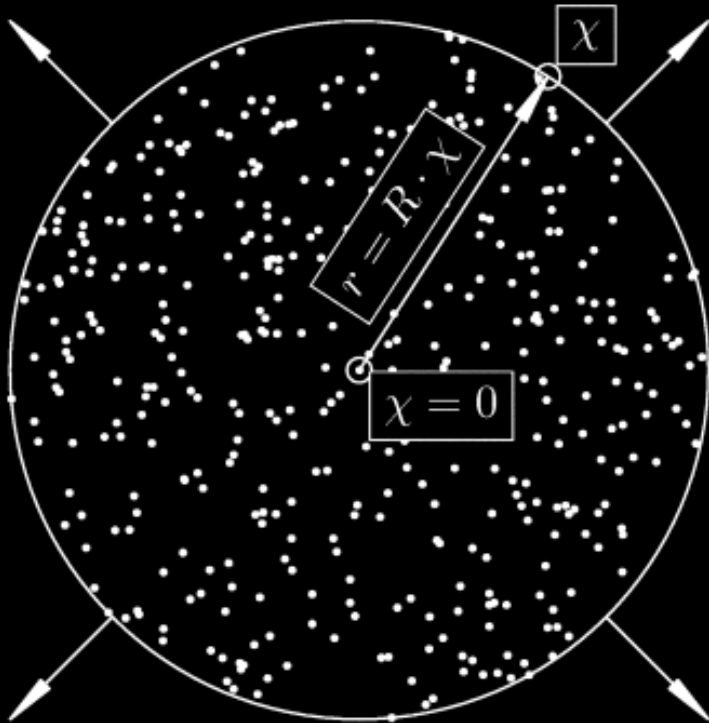
Von einer gedachten Kugel umschlossene Galaxien in einem unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universum



Einführung eines Skalenfaktors  $R(t)$ , der alle Entfernungen mit der Zeit anwachsen (Expansion) oder abnehmen (Kontraktion) lässt. Ein Skalenfaktor  $R(t)=1$  beschreibt ein statisches Universum

2d – Modell ( $R^2$ , unendlich ausgedehnte Ebene)

Die endliche Lichtgeschwindigkeit impliziert (unter der Annahme eines endlichen Weltalters) einen „Horizont“, der den (endlichen) beobachtbaren Teil des Universums vom unendlichen Universum trennt.



### Modell:

Man betrachtet ein expandierendes Volumen, welches mit einem „Galaxiengas“ gefüllt ist.

→ vergrößert man das Volumen, dann nimmt die Dichte ab. Da dabei die „innere Energie“ des Galaxiengases in potentielle Gravitationsenergie transformiert wird, bleibt dabei die Gesamtenergie erhalten (adiabatische Expansion).

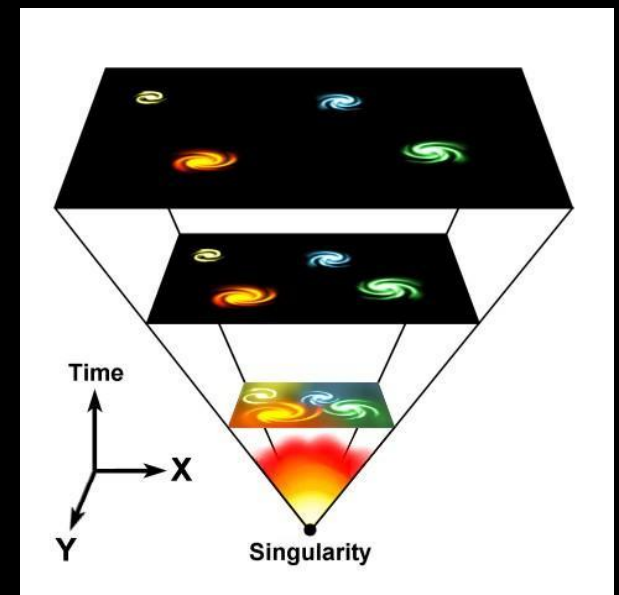
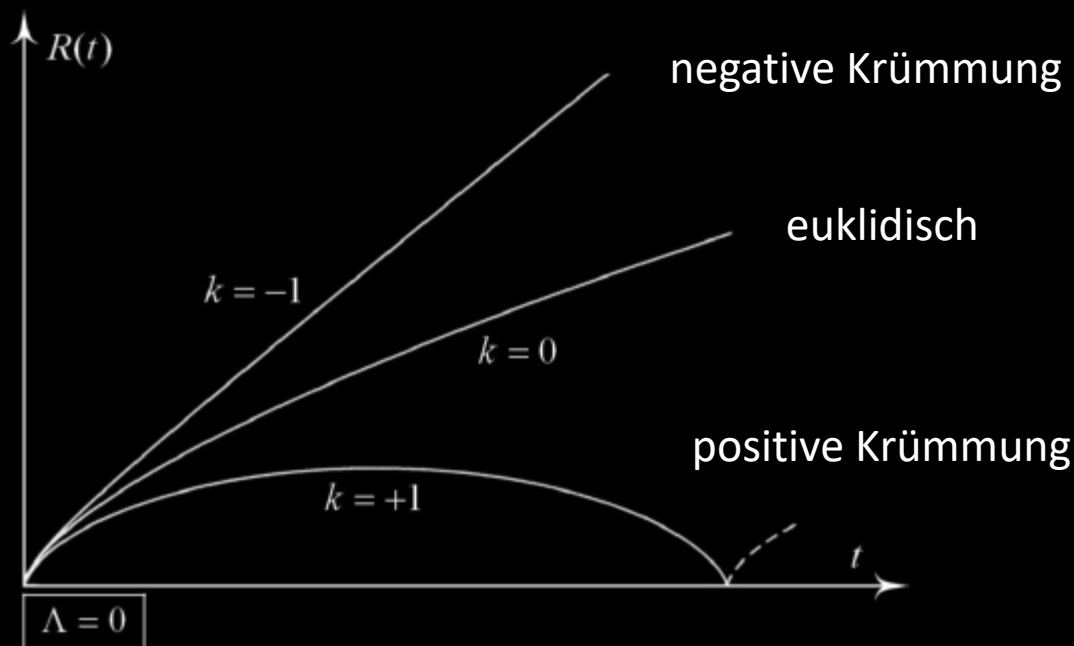
Mathematische Modellierung führt zu den **Friedman-Gleichungen** (Edward Milne, 1934)

# Friedmann-Lemaître-Gleichungen

Die **Friedmann-Gleichungen** stellen eine Vereinfachung der einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) unter der Annahme eines homogenen und isotropen Weltalls (Kosmologisches Prinzip) dar. Aus den Gleichungen lassen sich je nach dem Energiegehalt des Universums Voraussagen über seine **zeitliche Entwicklung** herleiten, d. h. die spezielle Form der Expansion oder Kontraktion.



Alexander Alexandrowitsch Friedmann (1888-1925)



# Ein paar Konsequenzen eines unendlich ausgedehnten Universums mit endlichen Weltalter

Beobachtbares Universum = **Hubble-Blase** im unendlich ausgedehnten Universum

Radius  $\sim 46,6$  Milliarden Lichtjahre bei einem Weltalter von 13,8 Milliarden Jahre

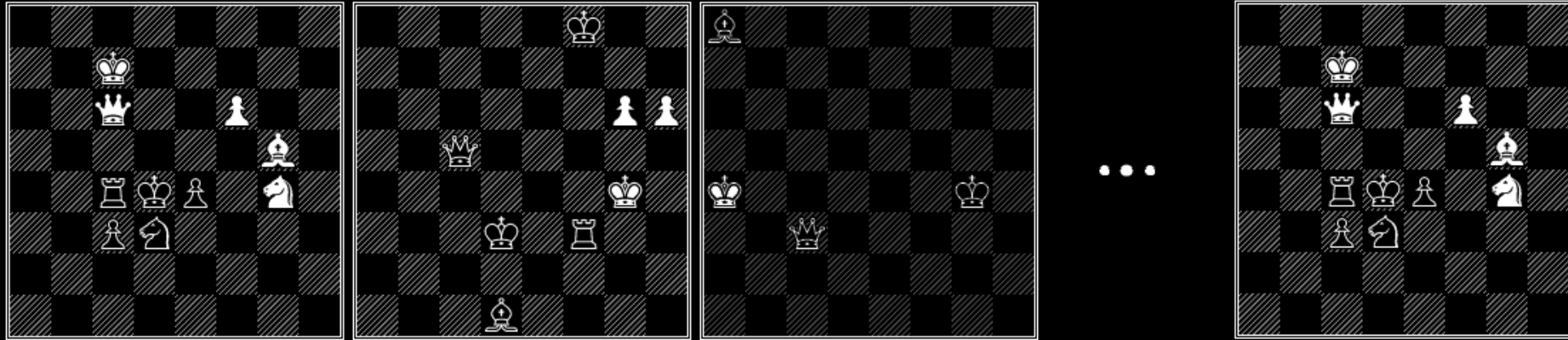
→ jeder Punkt im Universum hat seine eigene (expandierende) Hubble-Blase

→ Beobachter können sich nur dann „sehen“, wenn sich ihre Hubble-Blasen überlappen

Jede Hubble-Blase kann zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$  (gemessen vom Urknall) durch einen eindeutigen Quantenzustand beschrieben werden

- Es gibt eine physikalisch sinnvolle kleinste Länge (Planck-Länge,  $\sim 10^{-35}$  m) und eine physikalisch sinnvolle kleinste Zeit (Planck-Zeit,  $\sim 10^{-44}$  s)
- Mit dieser Länge lässt sich das Volumen der Hubble-Blase durch eine zwar riesengroße, aber endliche Zahl ausdrücken („moderne Sandzahl des Archimedes“  $\sim 10^{185}$  Phasenraumzellen)
- Es gibt dann ca.  $10^{10^{118}}$  Kombinationsmöglichkeiten für die ca.  $10^{80}$  Protonen sich auf die  $10^{185}$  Phasenraumzellen aufzuteilen (Stichwort Paulisches Ausschließungsprinzip)

# Das euklidische „Schachbrettuniversum“



## Problemstellung:

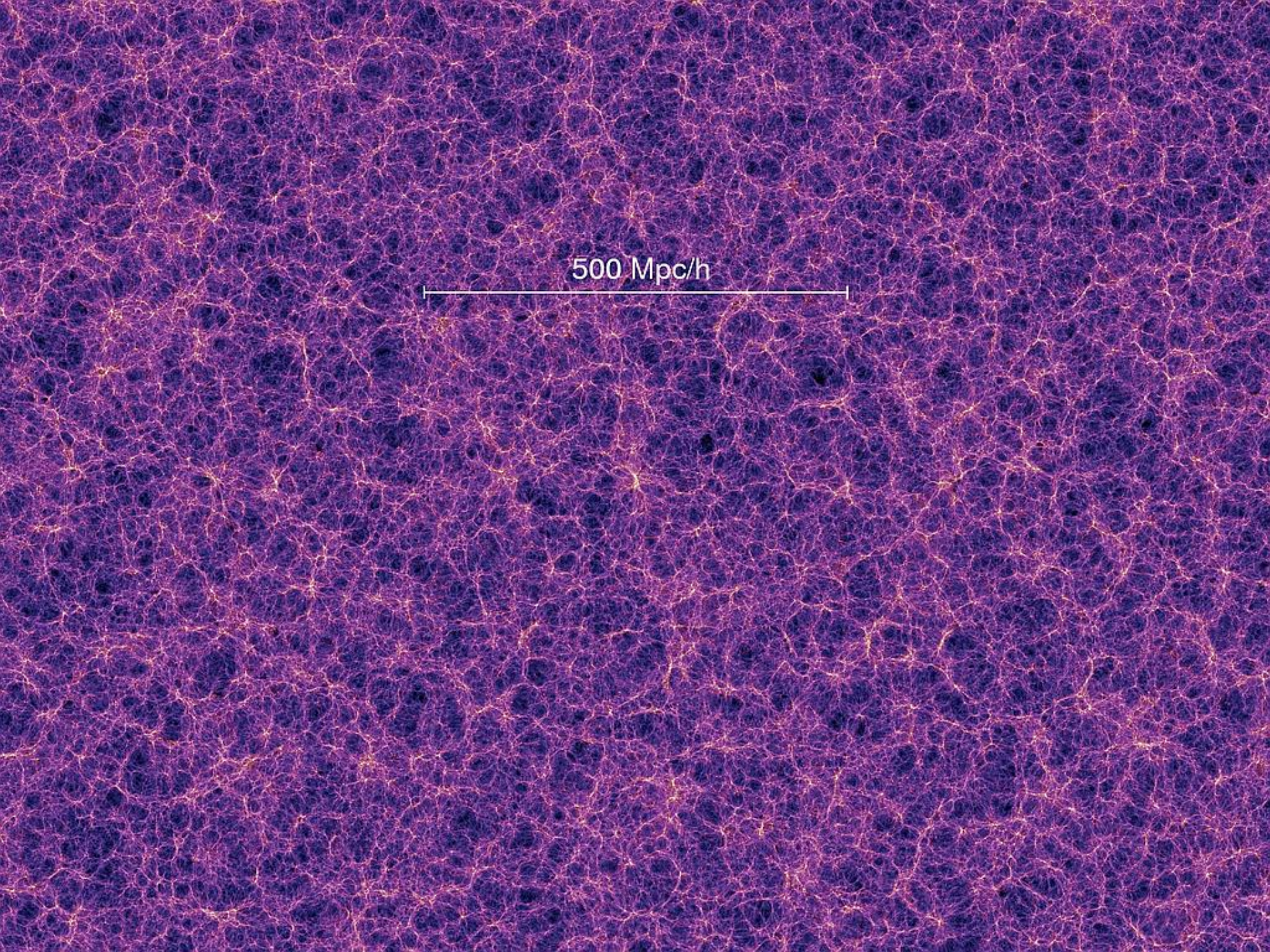
Wenn die Figurenverteilung auf jedem Schachbrett zufällig (d. h. „ausgewürfelt“) ist, ab dem wievielten in einer Reihe angeordneten Schachbrett ist dann wieder die Konfiguration des ersten Schachbretts zu erwarten?

Anzahl möglicher legaler Spielstellungen:  $\sim 10^{40}$

Anzahl möglicher Quantenzustände in der Hubble-Blase:  $\sim 10^{10^{118}}$

**Resümee:** unter  $\sim 10^{10^{118}}$  nicht überschrittenen Teilbereichen von der Größe einer Hubble-Blase kann man eine identische Kopie unserer Hubble-Blase erwarten





500 Mpc/h

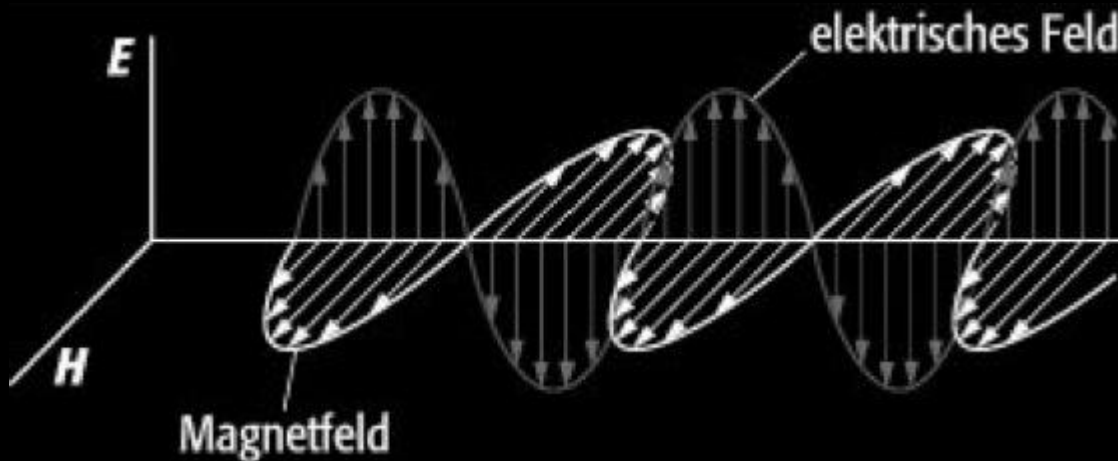




# Spezielle Relativitätstheorie – die Minkowski-Raum-Zeit

Anfang des 20. Jahrhunderts bestand ein wesentliches Forschungsprogramm im Nachweis des „Trägermediums“ der von James Clerk Maxwell theoretisch vorhergesagten und von Heinrich Hertz 1886 experimentell nachgewiesenen elektromagnetischen Wellen.

→ elektromagnetische Wellen: Transversalwellen (Stichwort: Polarisation)



# Äthertheorie

Die Frage nach einem universellen „Trägermedium“ für zuerst optische Erscheinungen (Young, Fresnel), für die Gravitation (Problem Fernwirkung) und später für alle elektromagnetischen Erscheinungen (Maxwell) führte zur Einführung des sogenannten „Äthers“, der den gesamten Kosmos gleichmäßig ausfüllen sollte.

- Man konnte sich in Analogie zu Wasserwellen (Transversalwellen) und zu Schallwellen (Longitudinalwellen) die Lichtausbreitung und die damit verbundenen Beugungs- und Interferenzerscheinungen nur im Zusammenhang eines „Trägermediums“ denken.
- Dieses „Trägermedium“ wurde als denknötwendig postuliert und dessen Existenz bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts nicht explizit hinterfragt
- Man versuchte aber im Rahmen der Mechanik die Eigenschaften dieses „Mediums“ zu bestimmen (in Analogie zur Wellenausbreitung in Festkörpern), die es haben muss, wenn sich darin elektromagnetische Wellen ausbreiten sollen

# Physikalische Eigenschaften des „Universellen Äthers“

Er füllt den gesamten kosmischen Raum gleichmäßig aus und bildet darin ein absolut ruhendes Bezugssystem

## Problem:

Dann müsste sich eine Relativbewegung zu diesem „Äther“ irgendwie messen lassen

Die von James Bradley 1725 entdeckte Aberration des Lichtes kann nur unter der Annahme eines ruhenden Äthers erklärt werden. Da sich aber die Erde um die Sonne bewegt, muss es aber eine relative Geschwindigkeit zwischen Erde und Äther geben (Stichwort: Ätherwind“).

→ teilweise „Mitführung“ des Äthers mit der Materie, um zumindest lokal eine verschwindende Relativbewegung zwischen Materie und Äther postulieren zu können

**Die Theorie des ruhenden bzw. mitgeführten Äthers führt zu unauflösbaren Widersprüchen**

# Mechanische Äthertheorie

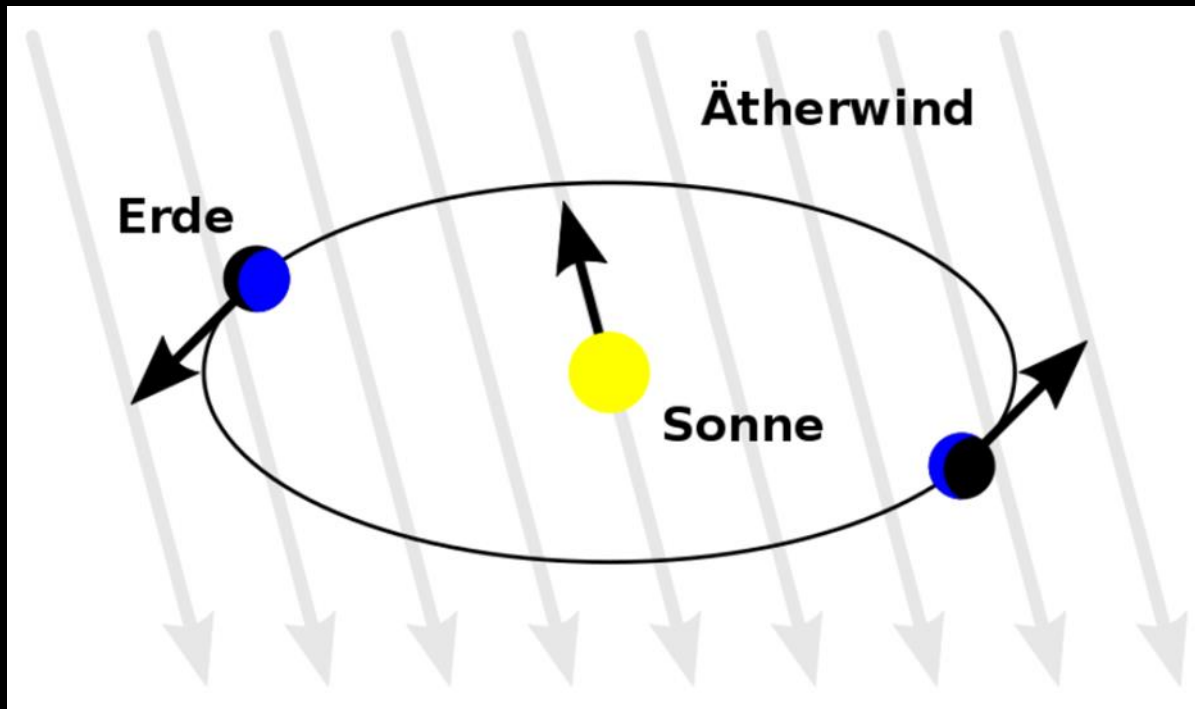
Ein „Medium“ sollte immer einen mechanischen Widerstand („Druck“) aufbauen. Da sich aber die Planeten quasi „reibungsfrei“ um die Sonne bewegen, muss der Äther 150 Milliarden mal weniger dicht sein als die atmosphärische Luft

Der „Äther“ ist die Ursubstanz der Welt und die „Materie“ nur spezielle „Anregungen“ davon, quasi „Ätherwirbel“: „Äther“ als Flüssigkeit, „Materie“ als „Wirbel“, die sich darin bewegen (Lord Thomson (Kelvin))

Der „Äther“ ist ein Festkörper, welcher sich lokal „verflüssigt“, wobei die entstehende „Flüssigkeit“ die „Materie“ darstellt. Die Stellen der „Verflüssigung“ („Materiekumpen“) bewegen sich derartig weiter, dass sich der „Äther“ hinter ihnen wieder verfestigt, d. h. erstarrt (Paul Langevin) .

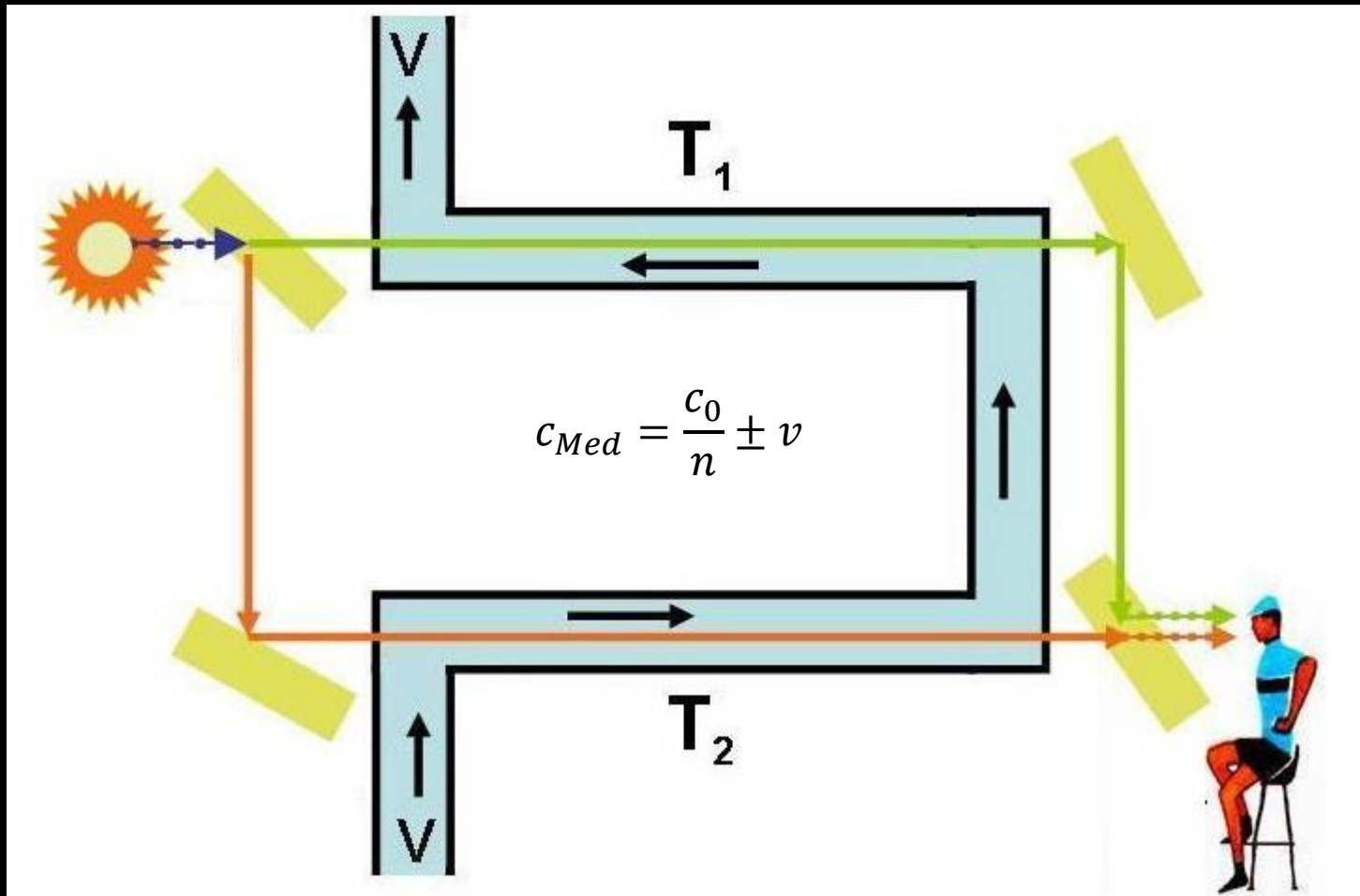
→ damit der Äther in Analogie zu Festkörperwellen die dazu extrem kurzen Lichtwellen übertragen kann, muss er extrem starr sein

# Michelson-Morley-Experiment (1881 bzw. 1887)



Die Erde sollte bei ihrem Umlauf um die Sonne eine Art „Ätherwind“ spüren. Dessen experimenteller Nachweis würde die Ätherhypothese bestätigen.

# Fizeauscher Mitführungsversuch (1851)

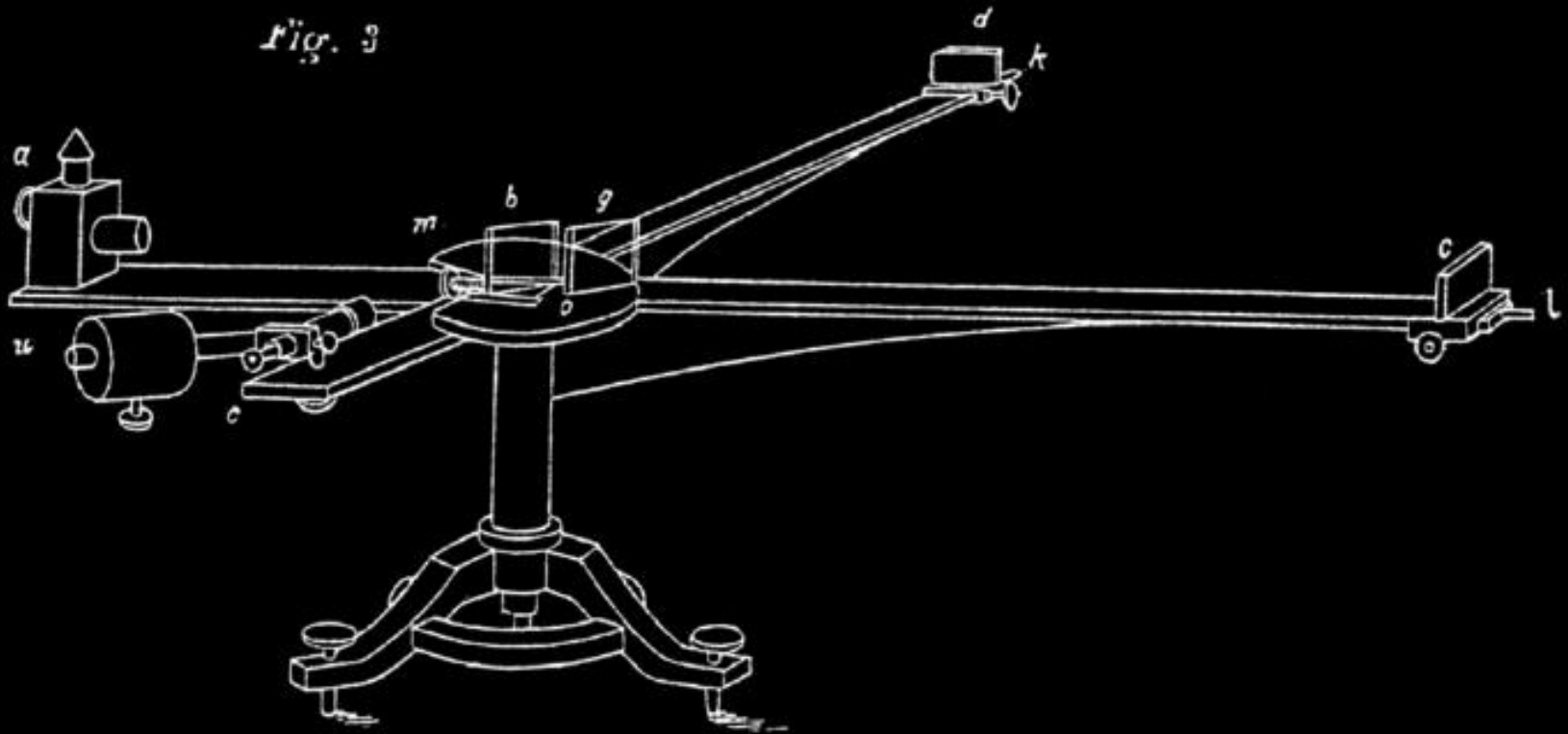


Experimentelles Ergebnis:

$$c_{Med} = \frac{c_0}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$n$  = Brechungsindex

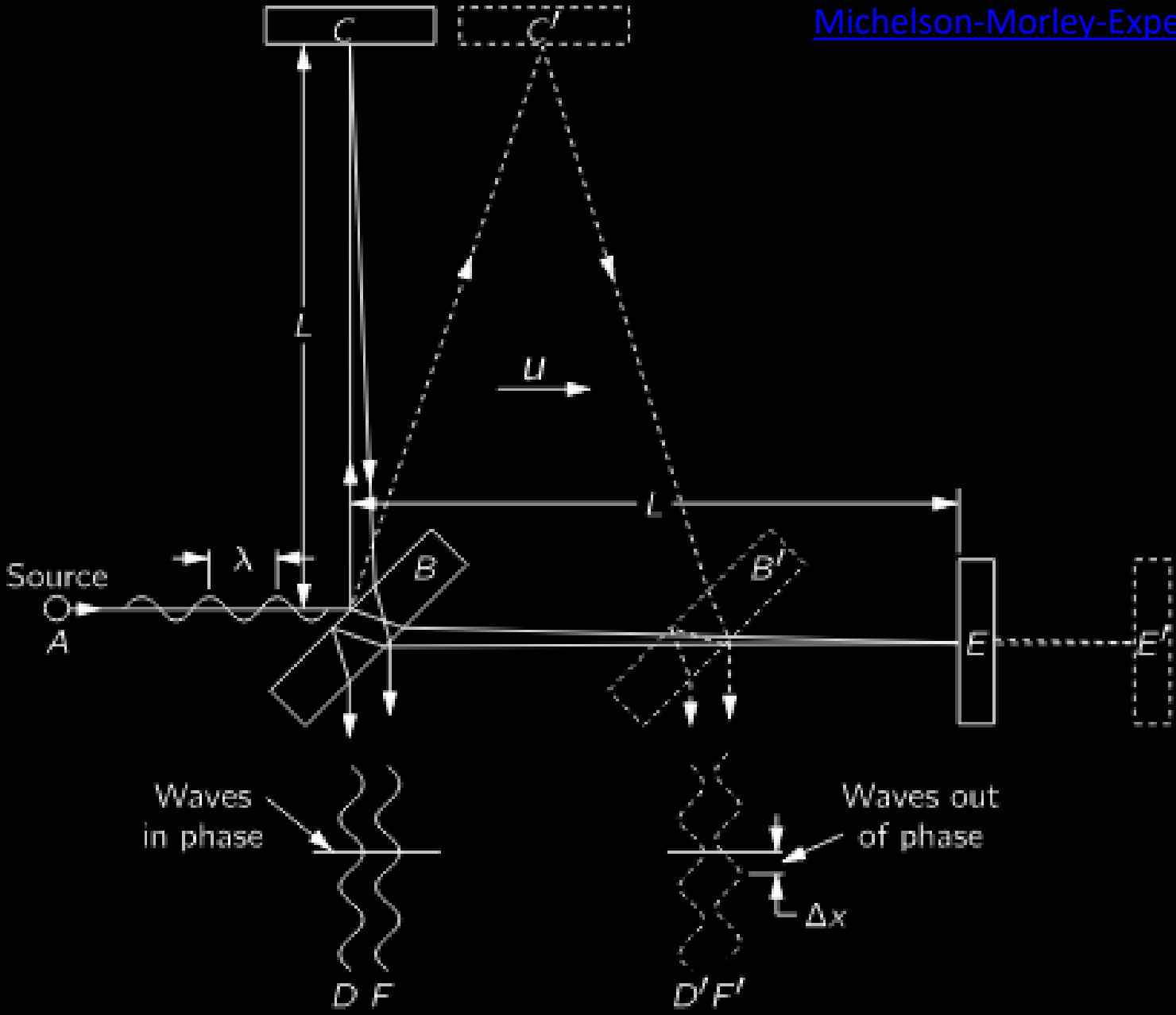
# Das Michelson-Morley-Experiment



**Zielsetzung:** Nachweis der Bewegung der Erde in Bezug auf den ruhenden „Weltäther“



VIDEO:  
[Michelson-Morley-Experiment](#)



## Quintessenz:

Elektromagnetische Wellen („Licht“) benötigen kein Trägermedium. Es gibt keinen „Weltäther“

Die Maxwellsche Elektrodynamik führt zu der Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = \text{konstant}$$

In der klassischen Mechanik gilt das „Klassische Additionstheorem“ der Geschwindigkeiten in Form der sogenannten „Galilei-Transformationen“. Die Maxwellsche Elektrodynamik steht im Widerspruch zu den „Galilei-Transformationen“. Es gilt vielmehr:

*„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“*

→ PRINZIP DER KONSTANZ DER LICHTGESCHWINDIGKEIT

In der Klassischen Elektrodynamik gibt es offensichtlich Phänomene, die von der Wahl eines Inertialsystems abhängen. Naturgesetze sollten aber unabhängig von einem bestimmten Inertialsystem sein.

→ Aufbau eines Kalküls, welches das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als Axiom enthält.

Die mechanischen und elektrodynamischen Gesetze müssen so formuliert werden, dass sie sich nicht ändern, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem wechselt unter der Prämisse, dass in beiden Inertialsystemen die Vakuumlichtgeschwindigkeit den gleichen konstanten Wert hat.

→ Revision des Begriffs der Gleichzeitigkeit mit der Erkenntnis, dass Längen und Zeitintervalle relativ sind, d. h. vom Bewegungszustand eines Beobachters abhängen



**SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE**

### 3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;* *von A. Einstein.*

---

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafte scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.



# Zeit und die Kausalstruktur der Welt

**Kausalität ist eine Erfahrungstatsache und nach Kant a priori gegeben ...**

**Kausalität** (lat. *causa*, Ursache) bezeichnet die Beziehung zwischen Ursachen und Wirkungen. Umgangssprachlich ist ein Ereignis oder Zustand A die Ursache einer Wirkung B, wenn A ein Grund ist, der B herbeiführt.

Eine **Kausalkette** ergibt sich, wenn jede Wirkung selbst wieder Ursache eines neuen Ereignisses ist. Sie spiegelt die transitive Natur der Kausalität wieder.

**Eine Ursache kommt immer vor einer von ihr bedingten Wirkung**



# Der Begriff des Ereignisses ...

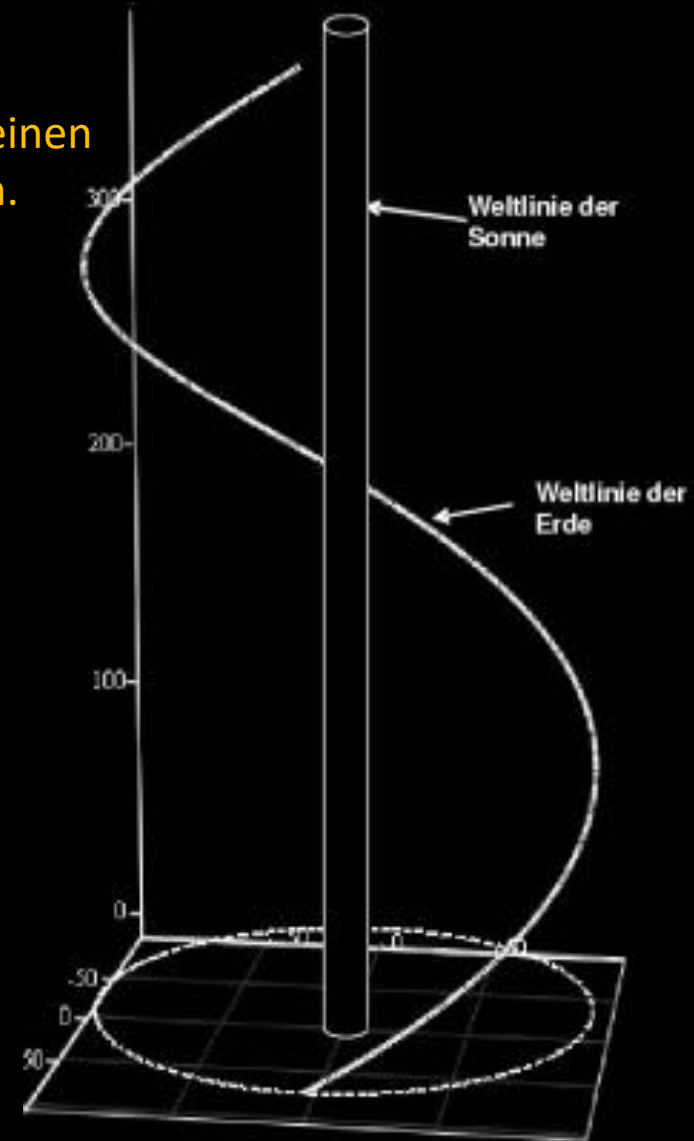
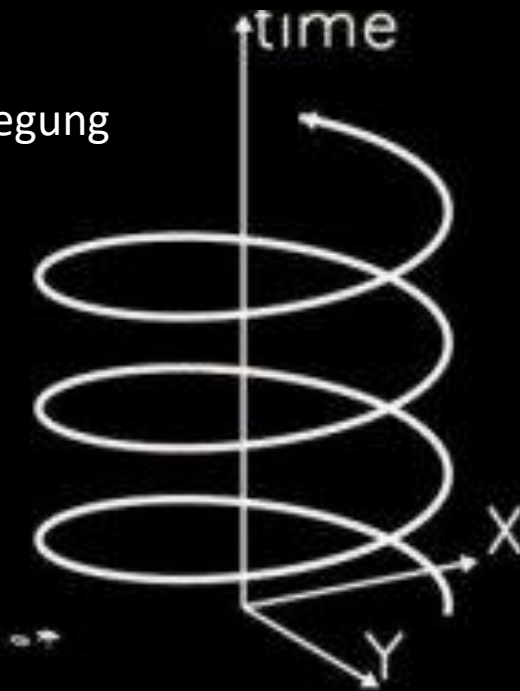
Ort  $(x,y,z)$  + Zeit  $(t)$  = Ereignis  $(x,y,z,t)$

Ein „Ereignis“ ist eindeutig durch einen Zeitpunkt  $t$  und einen Ort  $x,y,z$ , an dem es zum Zeitpunkt  $t$  stattfindet, gegeben.

Eine stetige „Linie“ von Ereignissen durch die Raum-Zeit nennt man „Weltlinie“

Weltlinie einer Kreisbewegung

Weltlinien verbinden  
Ereignisse kausal



# Klassische Mechanik:

Kausalität definiert eine strenge Ordnung von Ereignissen, d.h. Ereignisse lassen sich in eine topologische Reihenfolge bringen, die eindeutig ist und für die eine Kausalkette gilt und die sich durchnummerieren lässt (durch Zuordnung von Zeitpunkten gemäß der absoluten Zeit Newtons).

Ereignisse, die in der Gegenwart liegen, sind gleichzeitig

$A(x,y,z,t) \rightarrow B(x^*,y^*,z^*,t)$     A und B sind gleichzeitig.

Ereignisse, die zusammen einmal in der Gegenwart lagen, waren gleichzeitig

Die Newtonsche Mechanik besitzt eine strenge Kausalstruktur im Sinn der Anordnung von Ereignissen, ist aber in Bezug auf die Zeitrichtung symmetrisch.

*(d.h. alle Ereignisfolgen von der Vergangenheit in die Zukunft sind auch in umgekehrter Reihenfolge erlaubt, d. h. die Zeit dient nur als Parameter und definiert keine Richtung → Paradox der Zeit )*



# Das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

*„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“*

$$c_0 = 2.998925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



Folgt explizit aus der Maxwellschen Elektrodynamik und wurde experimentell in dem Interferometrieversuch von Michelson und Morley 1889 bestätigt.

Albert Einstein machte dieses Prinzip und das „**Spezielle Relativitätsprinzip**“ ( d. h. „die Gesetze der Maxwellschen Elektrodynamik sind in allen Inertialsystemen gleich“) zur Grundlage einer neuen physikalischen Weltbeschreibung, die bei Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, nahtlos in die „Klassische Mechanik“ Newtons übergeht.

Da die Geschwindigkeit gleich Weg durch Zeit ist und die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen konstanten Wert hat, gilt:

- **Lichtweg** = Lichtgeschwindigkeit mal Zeit
- Man kann mathematisch die Zeit wie eine Länge behandeln

**Ereignis:**  $(x, y, z, -c \cdot t)$   $\rightarrow$  „vierdimensionaler Raum“

# Der Minkowski-Raum

1907: Ereignisraum der speziellen Relativitätstheorie

- Punkte sind Ereignisse
- Ereignisse bilden ein vierdimensionales Kontinuum
- Metrik ist pseudo-euklidisch (wegen der Zeitkoordinate)
- Teilräume repräsentieren die Kausalstruktur der Welt für einen Beobachter

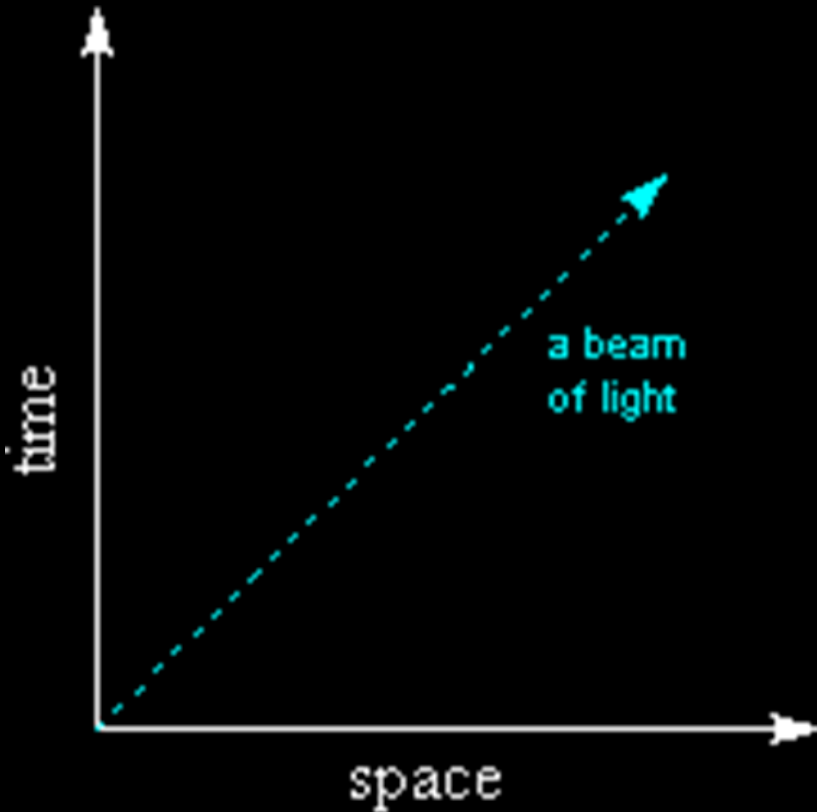
*Von nun an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren ...*

**Zur Vereinfachung:** Raum wird zur Ebene (nur x und y –Koordinate)  
Zeit wird als 3. räumliche Koordinate dargestellt (d. h. als Lichtweg)



Hermann Minkowski  
(1864-1909)

# Raum – Zeit - Diagramm



$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

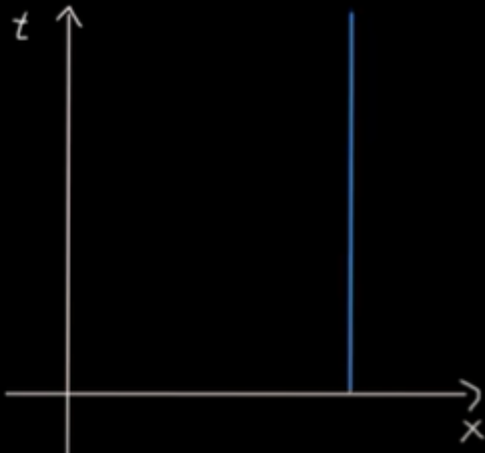
$$x_3 = z$$

$$x_4 = -c_0 t$$

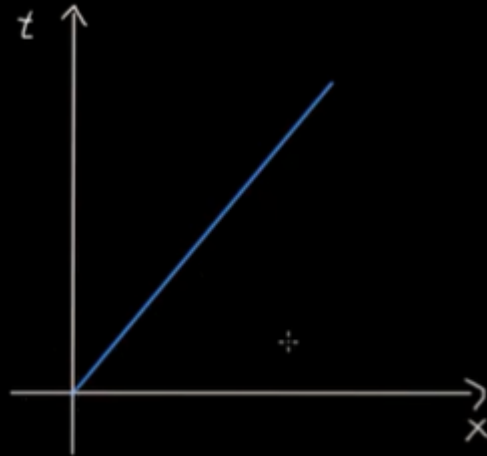
Jeder Punkt in diesem Diagramm stellt ein Ereignis, jede stetige Linie eine Weltlinie dar

Das Diagramm ist so skaliert, dass die Kurve eines lichtschnellen Teilchens (Photon) eine Gerade mit einem Anstellwinkel von  $45^\circ$  bildet (Beispiel: zweidimensionale Raum-Zeit)

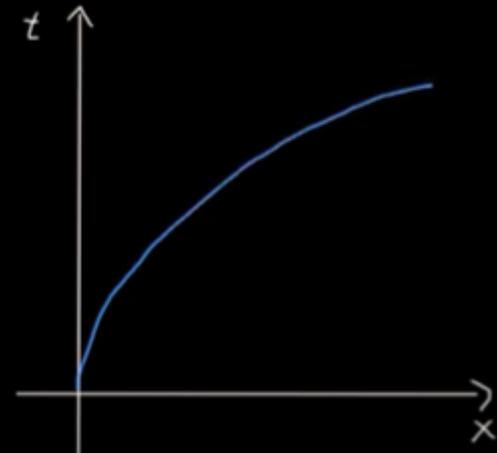
# Beispiel: Relativität der Gleichzeitigkeit



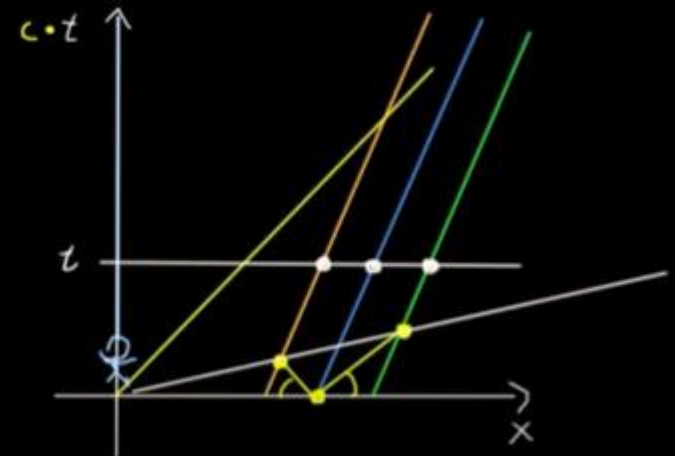
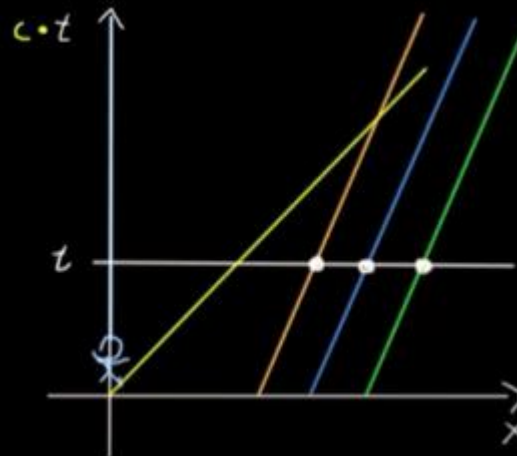
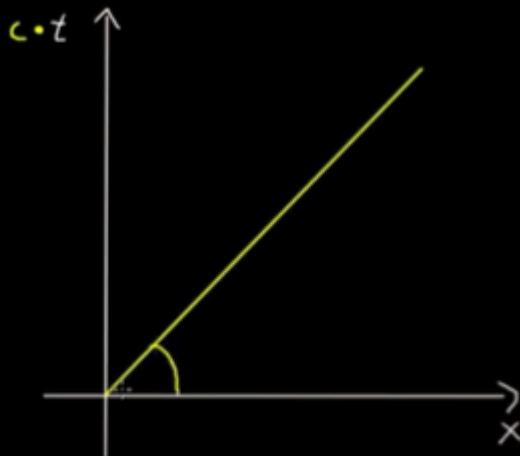
$v=0$

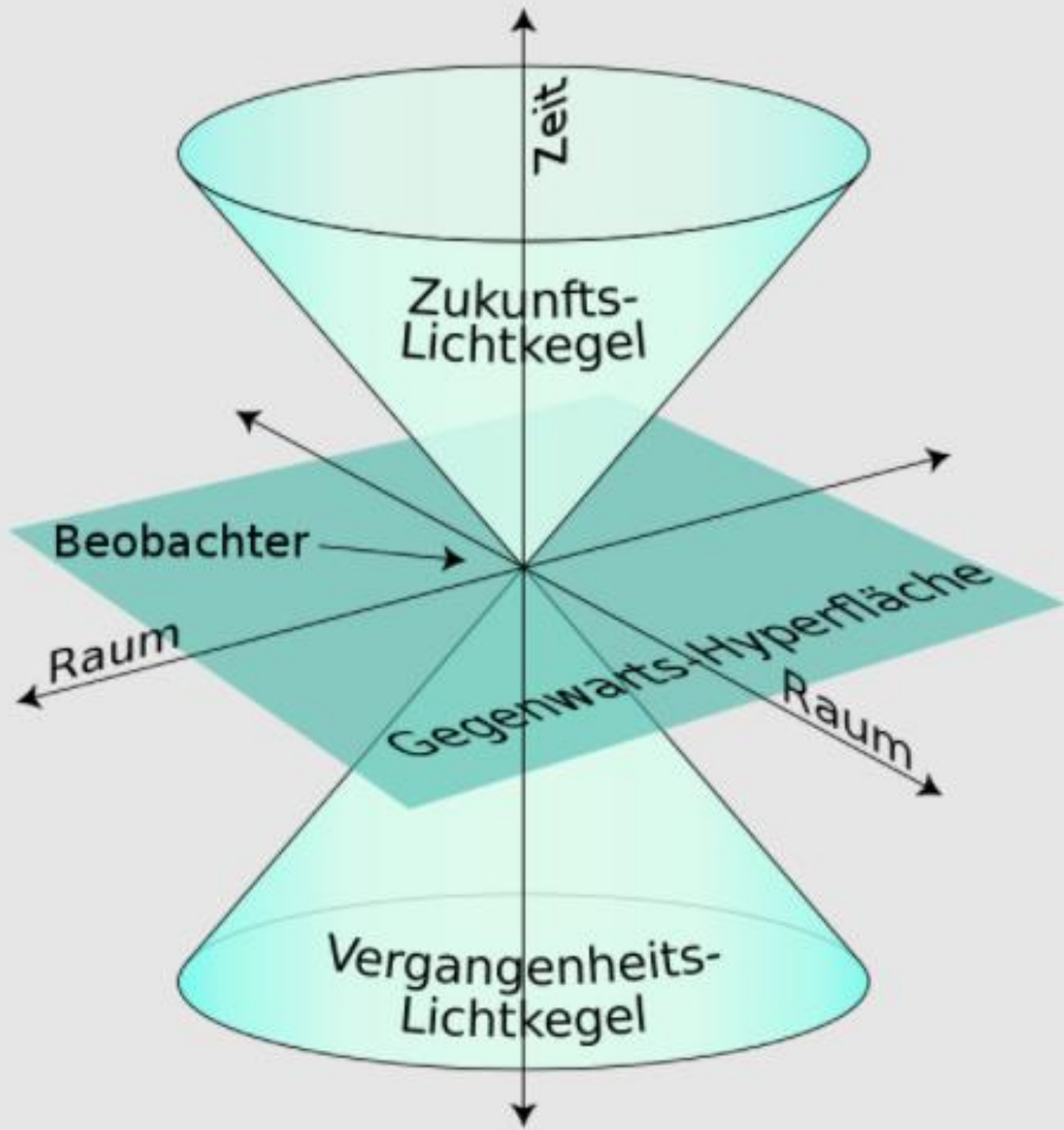


$v > 0 = \text{const.}$



$v = a \cdot t$  (beschleunigt)





## Raum-zeitliche Abstände im Minkowski-Raum:

**Metrik:**  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$

„Raumzeitlicher Abstand zwischen zwei Ereignissen“

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{„räumlicher“ Abstand}$$

$$dx_4^2 = -c_0^2 dt^2 \quad \text{„zeitlicher“ Abstand}$$

1. Zeitlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem räumlichen Anteil

$$dr^2 < c_0^2 dt^2 \quad \text{zeitartiges Intervall } ds^2$$

Alle Materieteilchen legen in einem Meter Lichtlaufzeit stets weniger als einen Meter im Raum zurück → Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit

2. Räumlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 > c_0^2 dt^2 \quad \text{raumartiges Intervall } ds^2$$

Marieteilchen müssten sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, um zwei raumartige Ereignisse miteinander zu verbinden

3. Räumlicher Anteil des Intervalls ist gleich dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 = c_0^2 dt^2 \quad \text{lichtartiges Intervall } ds^2$$

Wenn ein Ereignis durch Aussenden eines Lichtsignals ein anderes Ereignis direkt beeinflussen kann, dann sind diese beiden Ereignisse lichtartig miteinander verbunden

# Kausalstruktur der Minkowski-Raum-Zeit

Durch die Endlichkeit und die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand des Bezugssystems wird eine zeitliche Ordnung und damit auch eine Kausalordnung zwischen Ereignissen gewährleistet.

- ✓ **Ereignisse, die raumartig zueinander liegen, können sich kausal nicht beeinflussen.**
- ✓ **Wir können durch Handlungen nur die Zukunft beeinflussen**
- ✓ **Vergangene Ereignisse können die Gegenwart beeinflussen**

Das Kausalprinzip (Kausalitätsprinzip) bedeutet, dass jedes Geschehen seine (materielle) Ursache hat, und es keine ursachelosen, "akausalen" Dinge, Erscheinungen, Abläufe usw. gibt. Dieses in elementarer Form bereits von Aristoteles formulierte Kausalprinzip entspricht der Interpretation des Satzes vom zureichenden Grund: "*nihil fit sine causa*" ("nichts geschieht ohne Ursache").

**Preisfrage:** Ist die Kausalität ein absolut gültiges Naturgesetz?

→ Zweifel sind angebracht (Quantenmechanik, verschränkte Systeme)



Die Endlichkeit und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum prägt der Welt eine Makro-Kausalitätsstruktur auf:

→ Vergangenheit – Gegenwart – Zukunft

**Der raum-zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen ist eine Invariante**

$ds^2 < 0$       Zeitartiger Abstand

$ds^2 = 0$       Lichtartiger Abstand

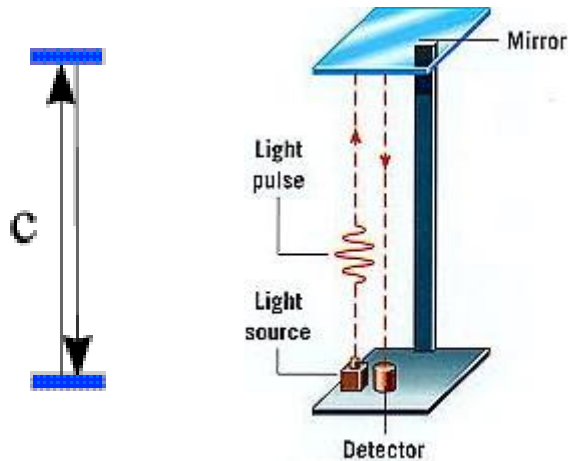
$ds^2 > 0$       Raumartiger Abstand

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

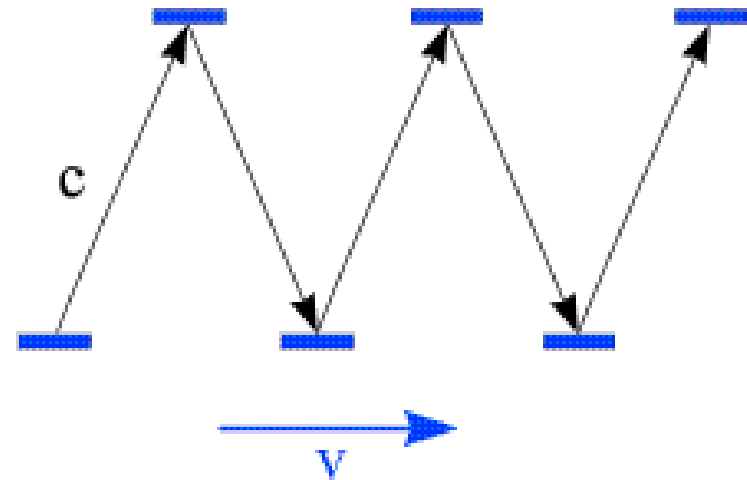
**Minkowski-Metrik**

# Effekte der Speziellen Relativitätstheorie

## Zeitmessung – die „Lichtuhr“

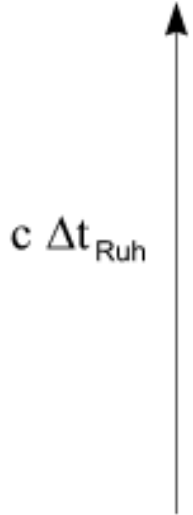


Ruhende Lichtuhr

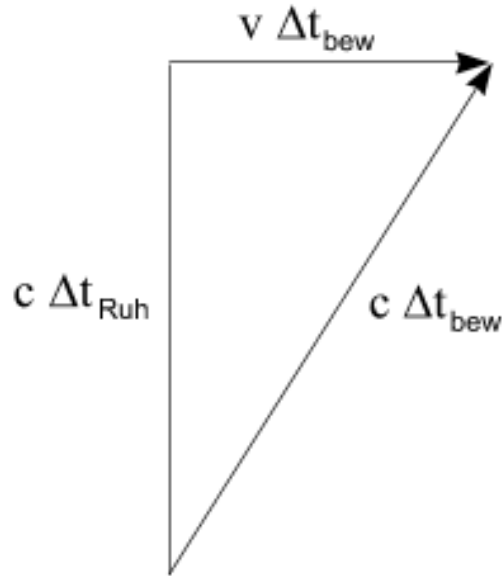


Bewegte Lichtuhr

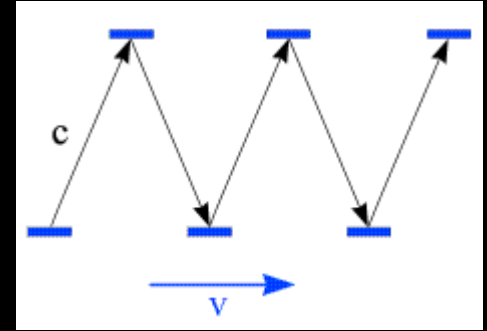
Zeit = Lichtlaufweg durch (konstante) Lichtgeschwindigkeit



Ruhende Lichtuhr



Bewegte Lichtuhr



$$(c\Delta t_{bew})^2 = (c\Delta t_{Ruh})^2 + (v\Delta t_{bew})^2$$

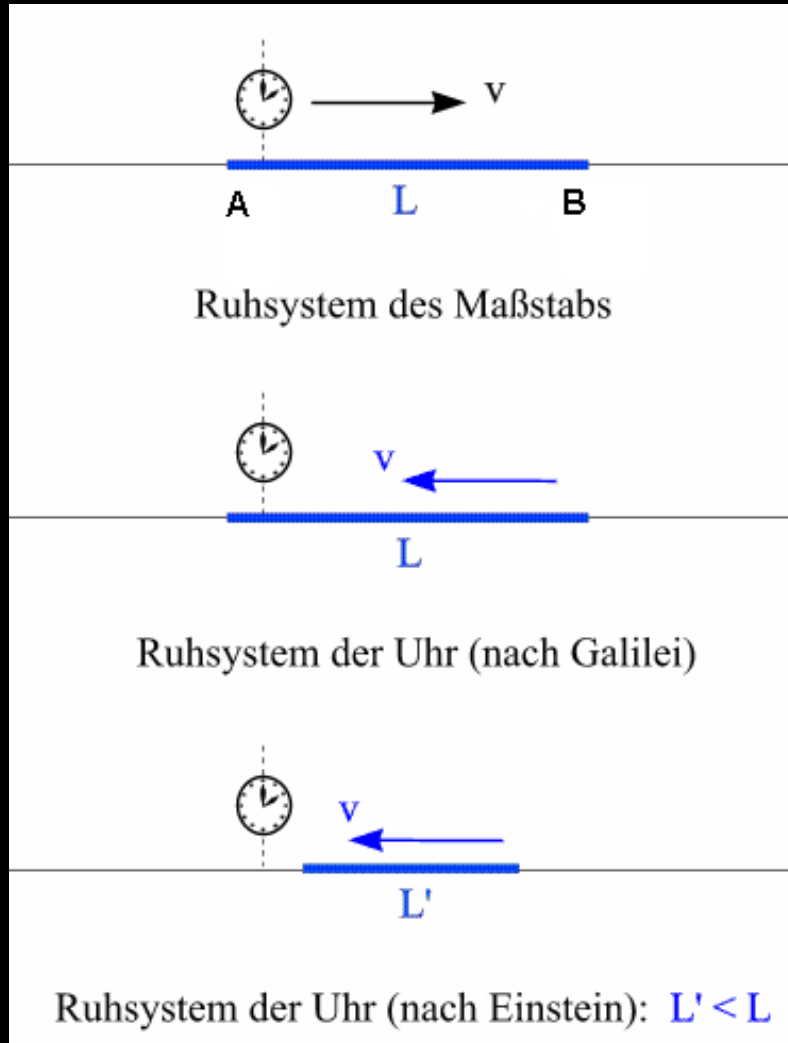
$$\Delta t_{bew} = \frac{\Delta t_{Ruh}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Eine mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Uhr geht um den Faktor

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

langsamer als in ihrem Ruhesystem

# Die Lorentz-Kontraktion



Uhr bewegt sich entlang Maßstab L  
Eigenzeit Uhr  $< L/v$  (d. h. sie geht langsamer)

Maßstab L bewegt sich an der Uhr vorbei  
Er schafft es aber in der Eigenzeit der  
Uhr nicht wegen  $t(\text{Uhr}) < L/v$

→ Widerspruch

Die Länge des Maßstabs ist – wenn sie  
im Ruhsystem der Uhr gemessen wird –  
kleiner als L, damit der Maßstab es schafft,  
sich an der Uhr in der zur Verfügung  
stehenden kürzeren Zeit  $t(\text{Uhr})$  vorbei  
zu bewegen

Im *Ruhsystem des Maßstabs* vergeht zwischen den Ereignissen A und B das Zeitintervall

$$\Delta t = L / v$$

Die Uhr selbst misst zwischen den Ereignissen A und B das (kleinere) Zeitintervall

$$\Delta t_{Uhr} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$$

Im Ruhsystem der Uhr hat der Maßstab also die Länge  $L'$  und benötigt fürs Vorbeifliegen die Zeit

$$\Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$$

Folglich gilt:

$$L' = v \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = L \sqrt{1 - \beta^2}$$

Ein mit Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Objekt ist in Bewegungsrichtung um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  kürzer als in seinem Ruhsystem

Lorentzsche Längenkontraktion

# Längenkontraktion wirkt nur in Bewegungsrichtung!

Aus dem Postulat der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen:

A) Bewegte Uhren gehen langsamer

B) Bewegte Körper sind in Bewegungsrichtung verkürzt

Ist das *wirklich* so?

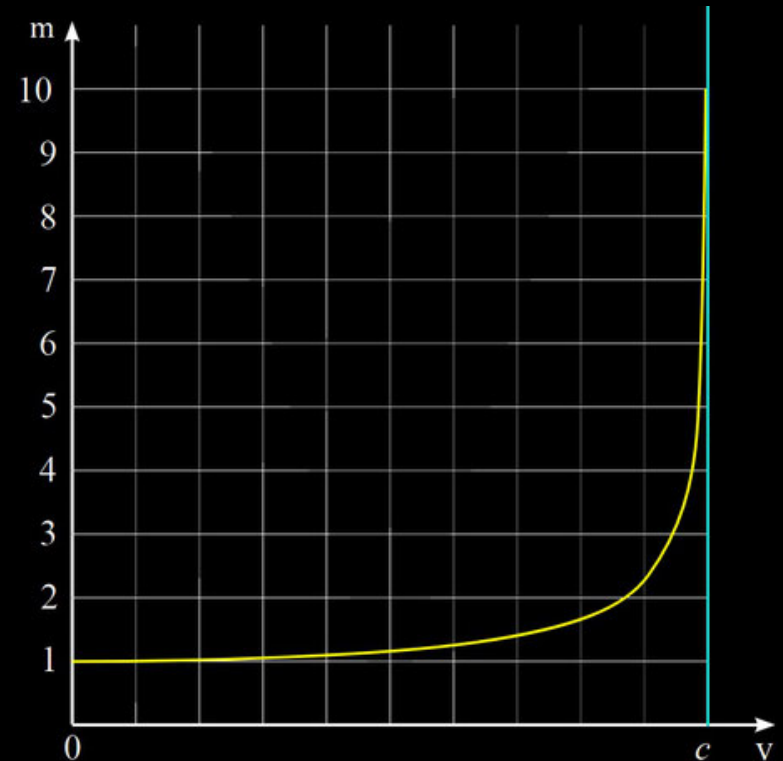


Das „Garagen-Paradoxon“

# Weitere Effekte der Speziellen Relativitätstheorie

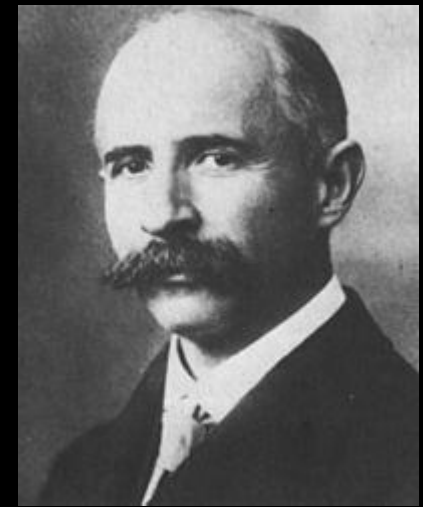
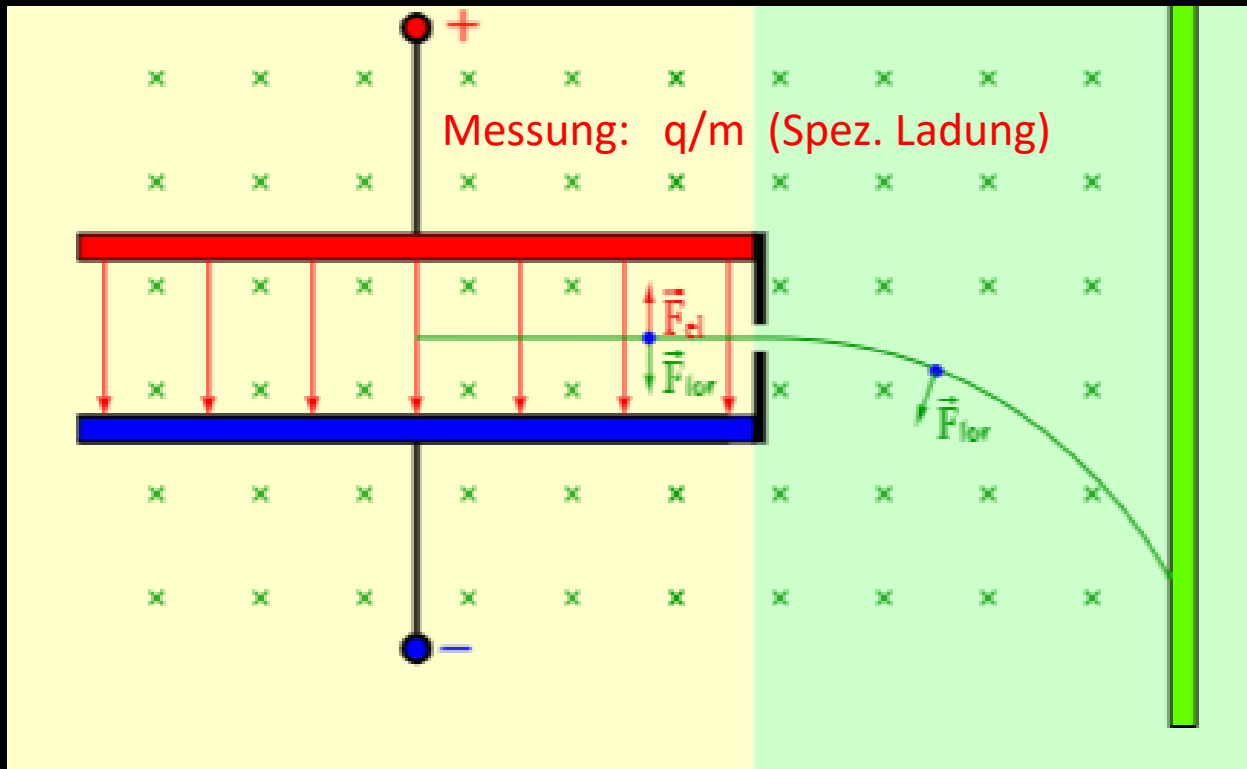
Relativistische Massenzunahme

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$m = \frac{2000\text{kg}}{\sqrt{1 - \frac{(150.000.000 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(300.000.000 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}} = 2309,4\text{kg}$$

# Experiment von Kaufmann und Bucherer



Walter Kaufmann  
(1871-1947)



Alfred Bucherer  
(1863-1927)

Hängt die träge Masse eines Elektrons von dessen Impuls  
(Geschwindigkeit) ab?

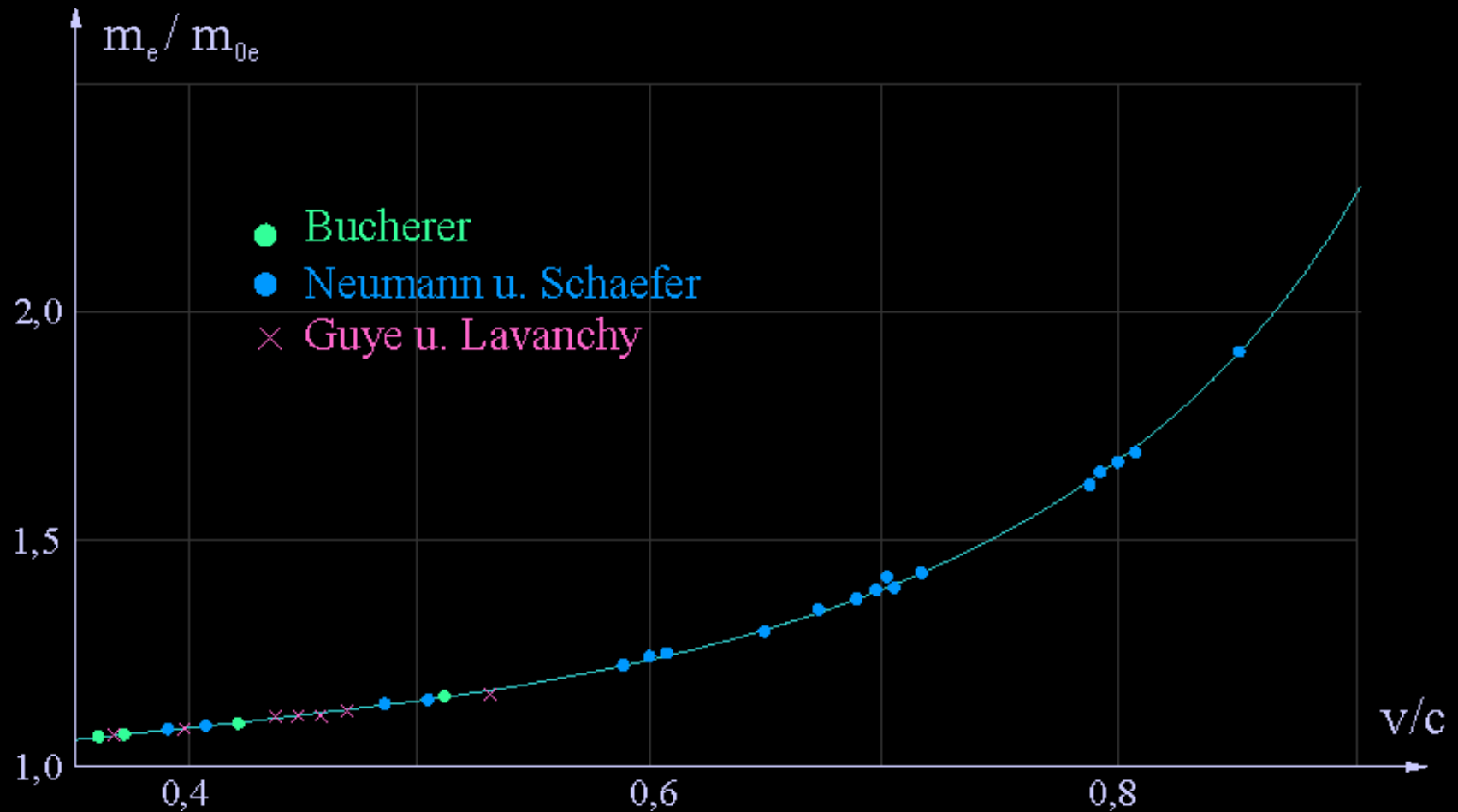
Kathodenstrahlen:  $v$  bis  $0.3c$

Beta-Strahlen:  $v = 0.7c - 0.9c$  (Abhängig vom Isotop)



## Ergebnis:

Da die Ladung konstant ist, muss die (Impuls-) Masse mit der Geschwindigkeit zunehmen



# Masse – Energie - Äquivalenz

Energie und Massenänderung hängen untrennbar zusammen:

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

(Es handelt sich um eine Zuordnung. Sie darf nicht als Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt verstanden werden.)

Jedes physikalische System (Teilchen, Körper...) mit der Masse  $m_0$  besitzt eine **Ruheenergie**  $E_0 = m_0c^2$ .

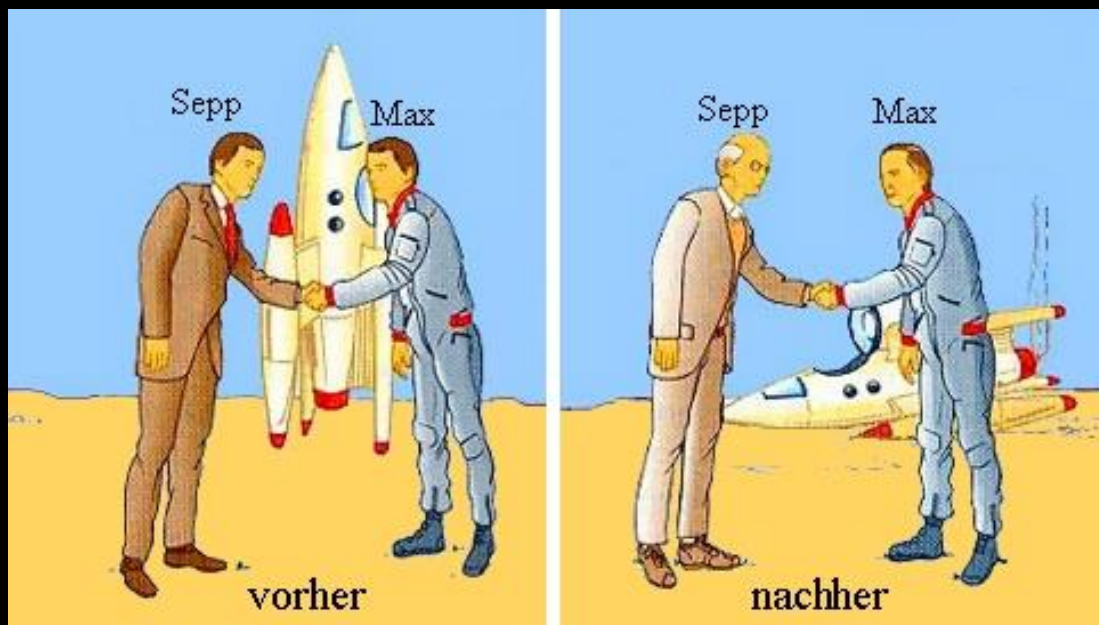
Die **Gesamtenergie** ist Ruheenergie + kinetische Energie:  $E = E_0 + E_{kin}$

Beispiel: Massedefekt bei Kernfusion

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

# Das Zwillingsparadoxon

In einem **Gedankenexperiment** fliegt ein Zwilling mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zu einem fernen Stern, während der andere Zwilling auf der Erde zurückbleibt. Anschließend kehrt der reisende Zwilling mit derselben Geschwindigkeit wieder zurück. Nach der Rückkehr auf der Erde stellt sich heraus, dass der dort zurückgebliebene Zwilling älter geworden ist als der gereiste - eine Folge der **Zeitdilatation**.



## Problem:

Symmetrie des Problems

Man kann sowohl das Inertialsystem von Sepp als auch das Inertialsystem von Max als ruhend betrachten

## Lösung des Problems:

Die Symmetrie wird dadurch gebrochen, dass der eine der Zwillinge erst eine Beschleunigungsphase durchmachen muss, um auf nahezu Lichtgeschwindigkeit zu kommen. Bei der Rückkehr muss er dagegen abbremsen (negative Beschleunigung), um sicher bei seinem Zwillingenbruder landen zu können. Und außerdem ist ein Richtungswechsel notwendig...

Die „Spezielle Relativitätstheorie“ gilt nur für Inertialsysteme (deshalb „speziell“). In beschleunigten Bezugssystemen ist sie nicht anwendbar.

**Albert Einstein:** Naturgesetze sollten aber in allen Bezugssystemen (d. h. auch beschleunigten) in gleicher Weise gelten. Oder anders ausgedrückt: Mathematisch sind Naturgesetze so zu formulieren, dass sie von einem gegebenen Bezugssystem unabhängig sind.



## ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE



# Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie von 1905 und insbesondere die geometrische Deutung durch Hermann Minkowski wurden von den Physikern jener Zeit als Revolution empfunden. Trotzdem wurde sie – insbesondere von Einstein selbst – als unbefriedigend angesehen, da sie Inertialsysteme unnatürlich in den Vordergrund rückte.

**Arbeitshypothese:** Naturgesetze müssen so formuliert werden, dass sie in **jedem** Bezugssystem (also auch beschleunigten) gelten.

KOVARIANZPRINZIP:

Invarianz der physikalischen Gesetze gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. „Koordinaten“ sind Hilfsgrößen in der Physik und sollten deshalb bei der Formulierung grundlegender Naturgesetze keine Rolle spielen.

# Das Äquivalenzprinzip als Schlüssel für die ART

## Beobachtung:

Jeder Körper fällt (im Vakuum) in einem Schwerfeld mit der jeweils gleichen Beschleunigung . Es gilt dabei nach Newton die Beziehung:

$$m_t \cdot g = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

- $M$  ist die Quelle des Gravitationsfeldes = „Gravitationsladung“
- $m_t$  ist die träge Masse des Körpers, der im Gravitationsfeld beschleunigt wird

Da die Gravitationsbeschleunigung  $g$  von der (trägen) Masse eines Körpers unabhängig ist, muss die „träge“ Masse der „schweren“ Masse streng proportional sein.

- In unserem Einheitensystem ist der Proportionalitätsfaktor = 1  
(träge Masse = schwere Masse)

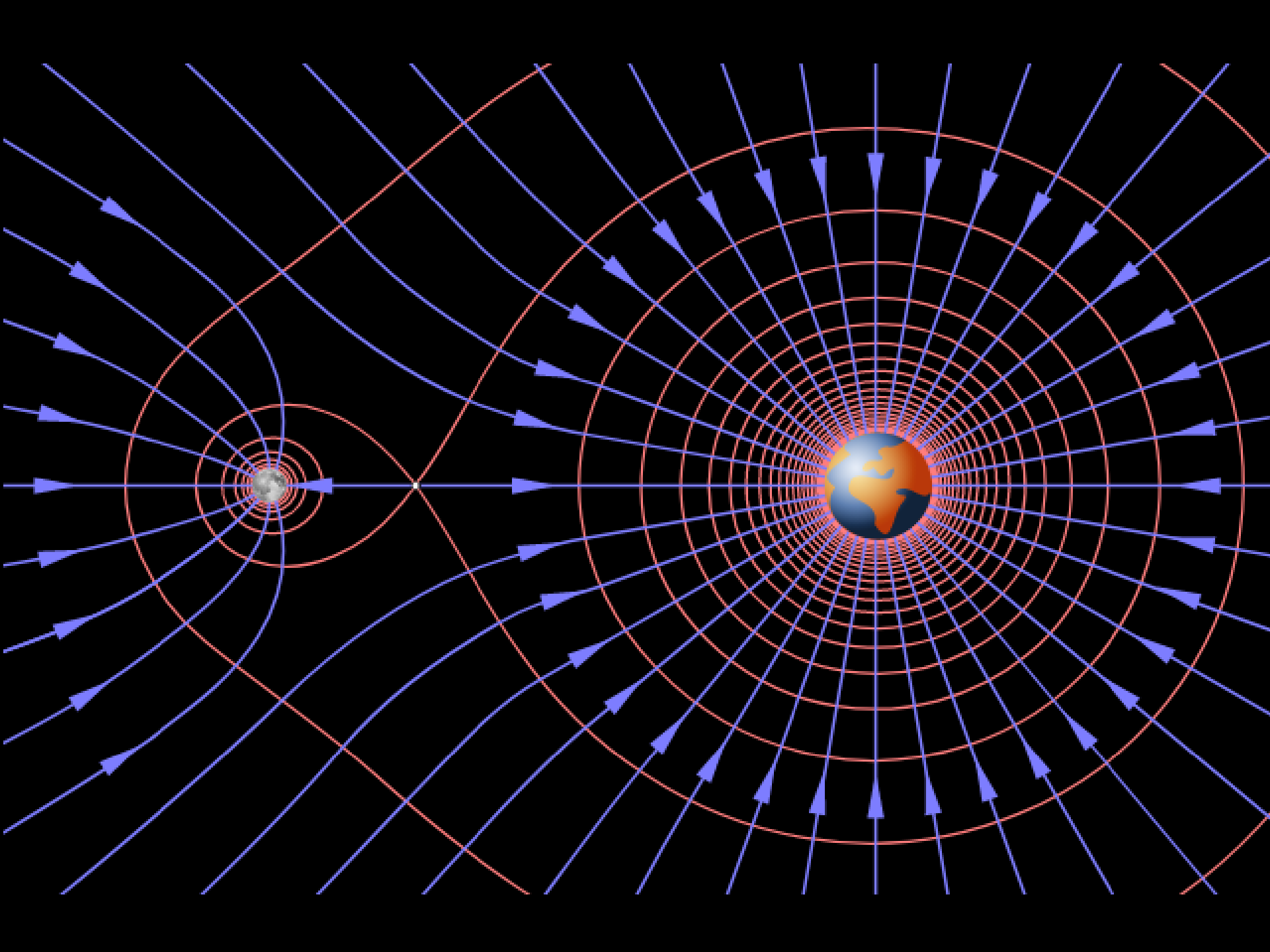
# Klassische Beschreibung der Schwerkraft (Gravitation)

$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{G}$
$ \mathbf{E}  \sim \frac{Q}{r^2}$	$ \mathbf{G}  \sim \frac{M}{r^2}$
$ \mathbf{a}  \sim q$	$ \mathbf{a}  \neq \mathcal{F}(m), a = const.$

Vergleich elektrisches Feld und Gravitationsfeld

- Die Gravitationskraft wird durch ein konservatives Potentialfeld – das Gravitationsfeld – vermittelt
- Das Gravitationsfeld geht von der „schweren Masse“ aus, die deshalb auch in Analogie zur elektrischen Ladung als „Gravitationsladung“ bezeichnet wird
- Es gibt nur positive Gravitationsladungen (d. h. die Gravitationskraft ist immer anziehend)
- Die Kraftwirkung nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab
- Die Gravitation ist nicht abschirmbar
- Ein im Gravitationsfeld frei fallender Körper „spürt“ keine Kraftwirkung (Schwerelosigkeit)
- Das Gravitationspotential einer Masse  $M$  ist immer negativ und so skaliert, dass es im Unendlichen verschwindet. Es gibt die (Hub-) Arbeit (Energie) an, um einen Körper an der Position  $r$  ins Unendliche zu verschieben...





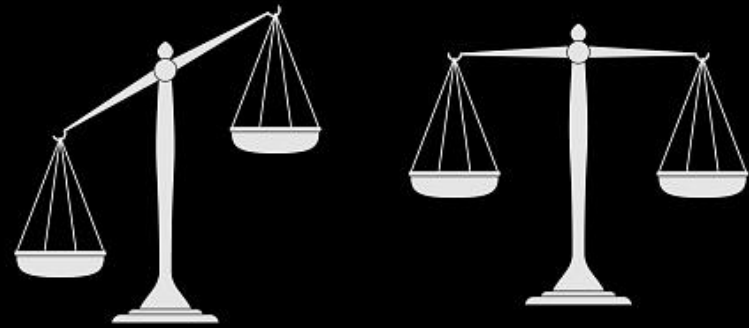
## Problem:

Die „klassische“ Gravitationstheorie Newtons widerspricht der Speziellen Relativitätstheorie (Lorentzinvarianz, instantane Gravitationswirkung)

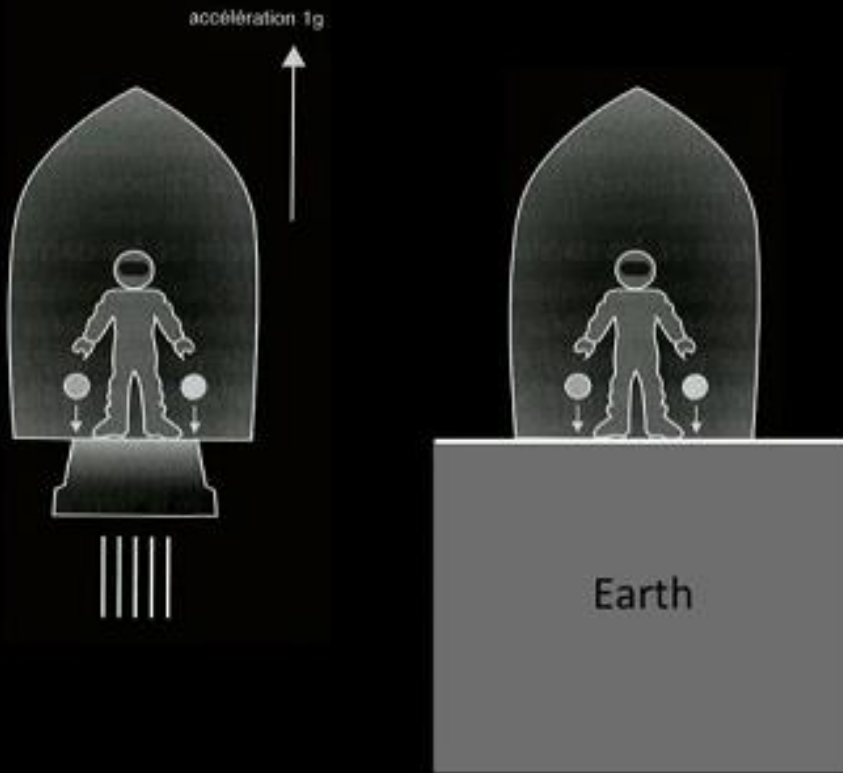
## Gedankenexperiment „Balkenwaage“

Balkenwaage reagiert instantan auf eine radiale Verschiebung der Sonne

D. h., nach Newtons Theorie würde die Waage in exakt demselben Augenblick ansprechen, in dem die entfernte Masse bewegt wird, und ein Signal wäre verzögerungsfrei übermittelt worden – was nach der SRT verboten ist.



# Das Gleichnis mit den Fahrstühlen ...



Beide Beobachter spüren die gleiche Beschleunigung.

## FRAGE:

Ist es möglich, mit einem Experiment in der Kabine zu entscheiden, ob der Beobachter in einem Gravitationsfeld ruht oder ob er im freien Weltraum mit der gleichen Beschleunigung beschleunigt wird?

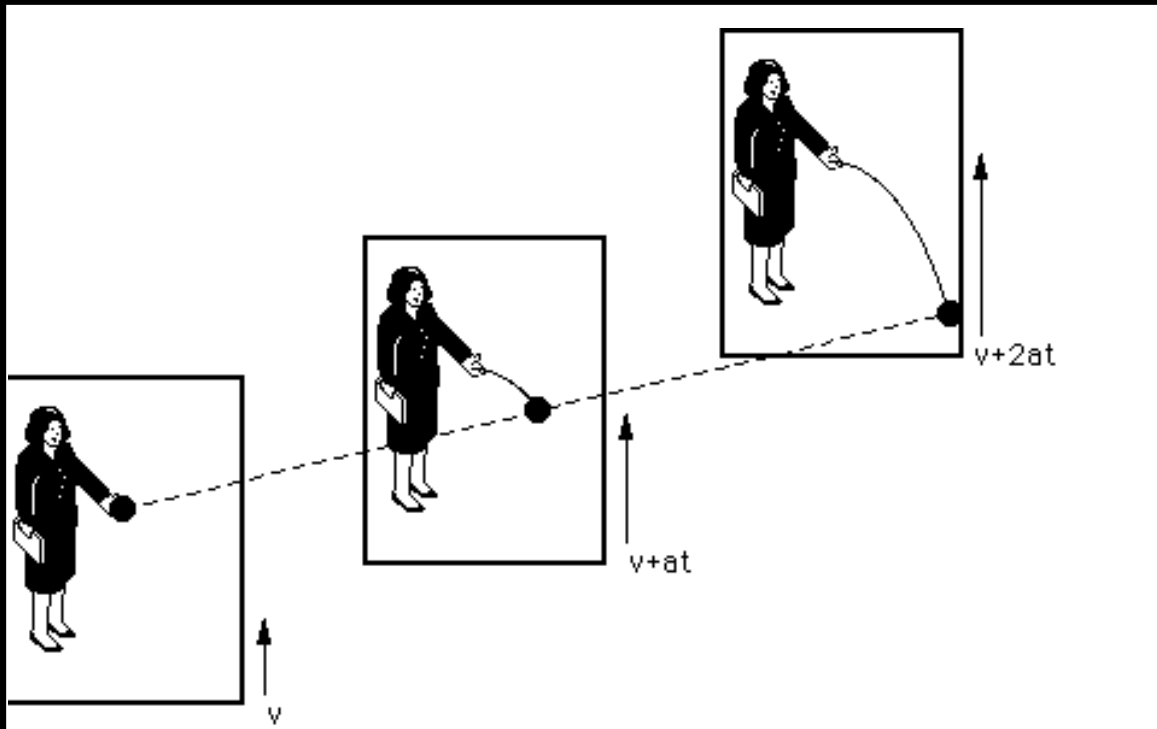
„Frei schwebendes Bezugssystem“



Lokales Minkowski-System

## Erkenntnis:

In einem hinreichend kleinen „Raum“ (= lokales Minkowski-System) kann man durch keine physikalische Messungen in dessen Inneren (= Lift-Kabine) feststellen, ob dieser Raum in einem homogenen Gravitationsfeld mit der Schwerebeschleunigung  $g$  ruht oder durch eine von außen wirkende Kraft mit der Beschleunigung  $g$  beschleunigt wird.



Ruhendes Bezugssystem:

Kugel bewegt sich geradlinig gleichförmig – Bahnkurve ist eine Gerade

Beschleunigtes Bezugssystem:

Kugel bewegt sich beschleunigt – Bahnkurve ist eine Wurfparabel

# Lichtablenkung in einem beschleunigten Aufzug

scheinbare Position  
des Sterns



wahre Position  
des Sterns

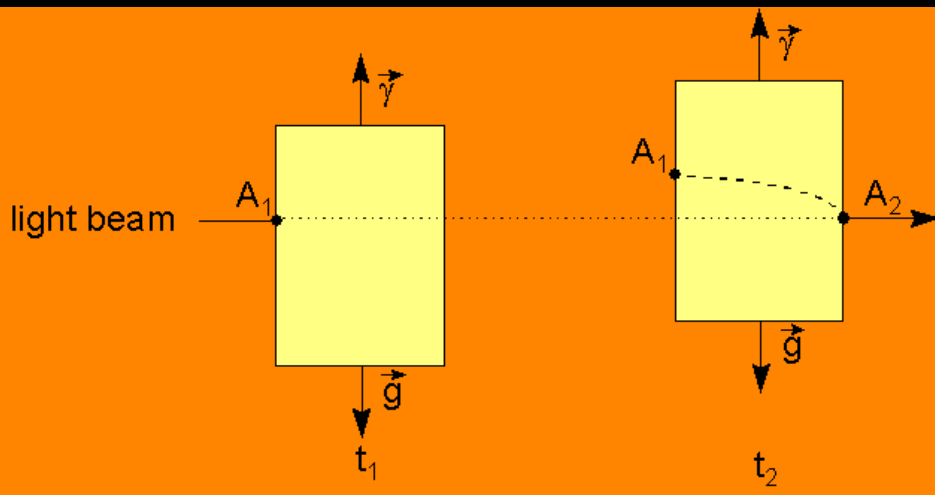


Sonne



Erde

Gravitationsfeld



**Äquivalenzprinzip:**

Lichtablenkung in einem Schwerfeld

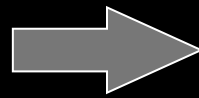
Nochmal: „freischwebendes Bezugssystem“

→ Schwerelosigkeit

Realisierung:

- irgendwo im Kosmos weitab von größeren Massen
- freier Fall in einem Gravitationsfeld

$$\int_A^B ds^2 = \textit{Extremal}$$



Geodäte

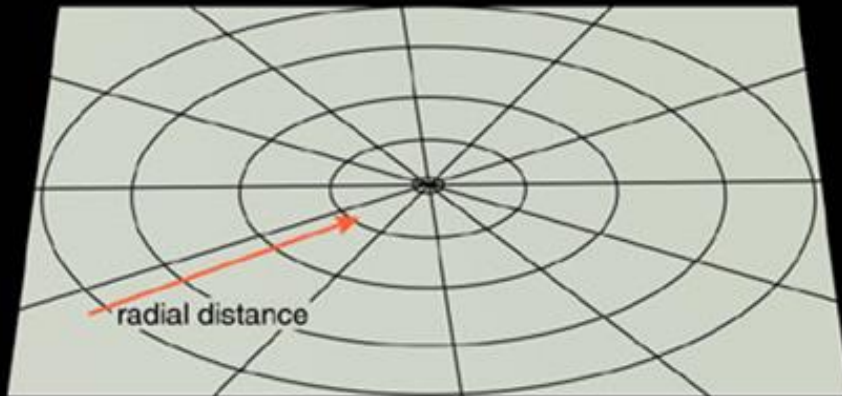


$$ds^2 = g_{11}dx_1 + g_{12}dx_2 + g_{21}dx_1 + g_{22}dx_2 + \dots$$

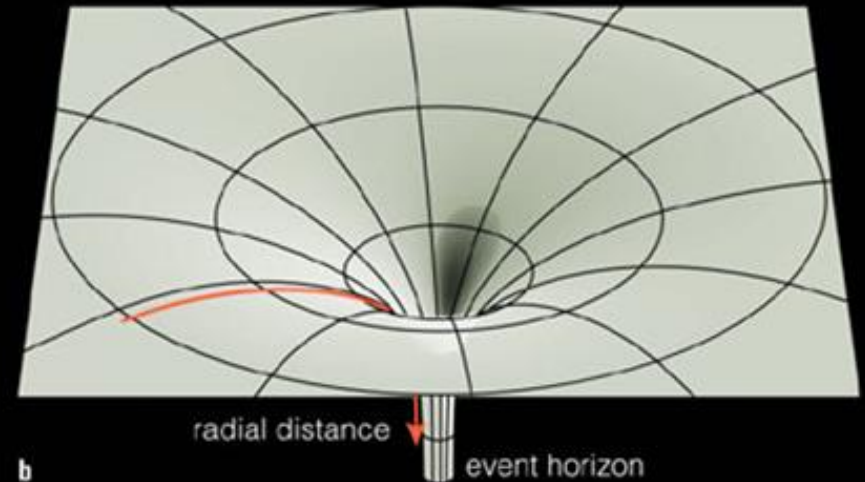
$$ds^2 = \sum_{i,j}^4 dx_i g_{ij} dx_j = dx_i g_{ij} dx_j$$

# Geodäte:

- In einem euklidischen Raum → Gerade
- Nichteuklidischen Raum → „gekrümmte“ Linie



a



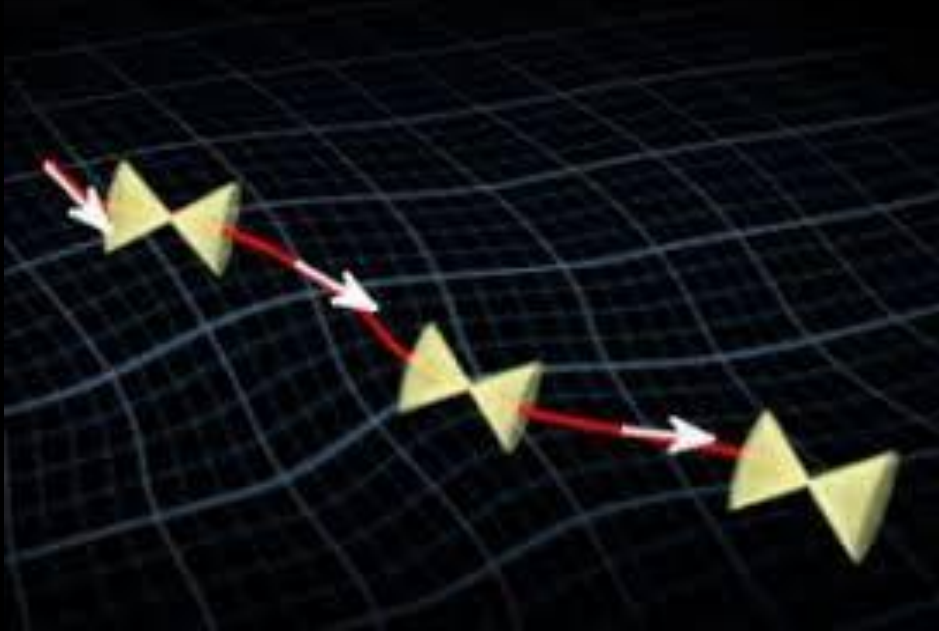
b

Durch was ist eine „Geodäte“ von anderen Verbindungslinien von einem Ereignis A zu einem Ereignis B ausgezeichnet?

## Prinzip der maximalen Alterung:

Der Weg, den ein Körper zwischen zwei Ereignissen A und B in der Raumzeit nimmt, ist der Weg, für den die Eigenzeit des Körpers zwischen diesen Ereignissen ein Extremum ist.

- Der Zwilling, der sich gegenüber dem anderen Zwilling beschleunigt bewegt, altert weniger... (Stichwort: Zwillingsparadoxon)
- Eine **Geodäte** ist die Bahn durch die Raumzeit, auf der ein Körper maximal altert ...

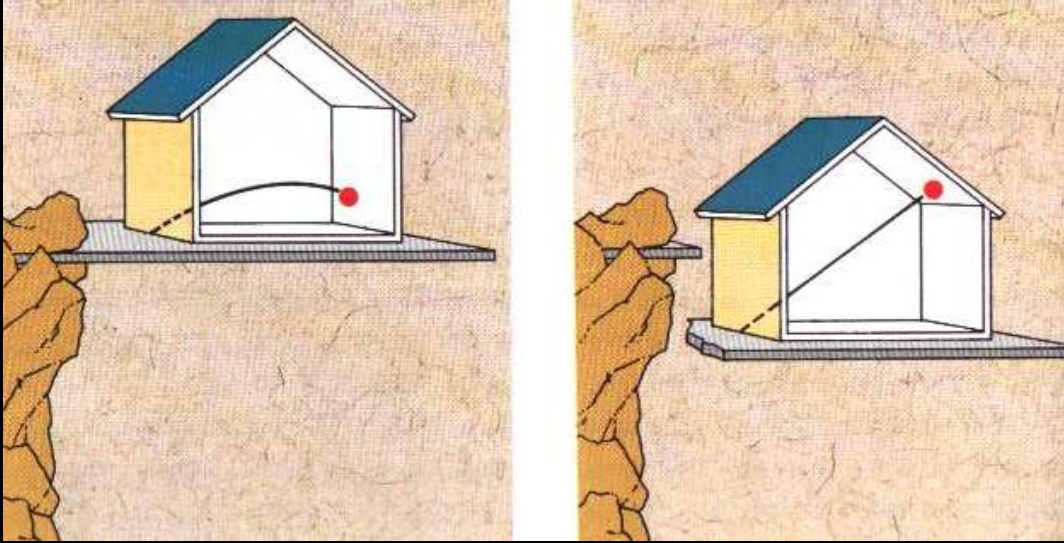


Bedingung für kräftefreie Bewegung von einem Ereignis A zu einem Ereignis B

Das Prinzip der maximalen Alterung besagt, dass ein Teilchen, das nicht von äußeren Kräften beeinflusst wird, den längsten Weg in der Raumzeit zurücklegt, d. h. den Weg, der die größtmögliche Eigenzeit ergibt.



# Ist die „Schwere“ eine Illusion?



Im freischwebenden Bezugssystem bewegt sich der Ball entlang einer Geraden, im fest im Gravitationsfeld verankerten Bezugssystem dagegen entlang einer Wurfparabel.

**Der Freie Fall ist eine Illusion. Jeder nicht beschleunigte Körper bewegt sich entlang einer Geodäten durch die Raumzeit. Die Gravitation wird nur dadurch „vorgetäuscht“, dass man sich in einem besonderen, nicht-frei fallenden Bezugssystem (z.B. der Erdoberfläche) befindet.**

Kurzfilm: Die Schönheit der Geodäten

# Einsteinsche Feldgleichungen und ihre Lösungen



Die Beschleunigung, die wir relativ zu den nicht-frei fallenden Bezugssystem erfahren, hängt von der lokalen Krümmung der Raum-Zeit ab.

- keine Krümmung – keine Beschleunigung – keine Gravitation
- schwache Krümmung – geringe Beschleunigung – geringe Gravitation
- starke Krümmung – starke Beschleunigung – starke Gravitation

## Frage: Was krümmt die Raum-Zeit?

Antwort (Einstein 1916): **Die Krümmung wird durch die lokale Energie- und Impulsdichte verursacht.**  
*(vereinfacht ausgesprochen, Massen und Masseströmungen krümmen die Raum-Zeit)*



**Beschrieben durch die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation**

# Einsteinsche Gravitationsfeldgleichungen

Formulierung des Phänomens der Gravitation mit den Mitteln der Differentialgeometrie.  
Die Grundidee ist dabei die Verknüpfung einer Energie-Impuls-Verteilung mit der Geometrie der Raumzeit

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik} \quad \begin{array}{l} = 16 \text{ part. Differentialgleichungen} \\ \rightarrow \text{wegen Symmetrie 10 Gleichungen} \end{array}$$

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = -8\pi \frac{G}{c^4} \mathbf{T}$$

Kurzform

Kosmologisches Glied

Einsteinsche Gravitationskonstante

Die Raumzeit wirkt auf die Masse (Energie), indem sie ihr sagt, wie sie sich bewegen soll;  
die Masse (Energie) wirkt umgekehrt auf die Raumzeit, indem sie ihr sagt, wie sie sich krümmen soll.

# Was bedeutet „Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen“ ?

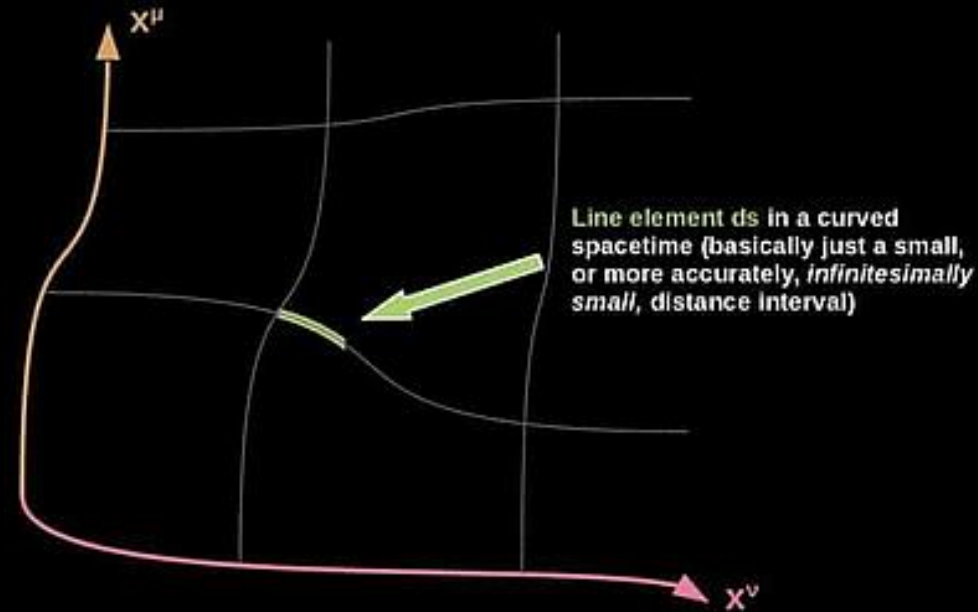
→ Eine Gleichung ist dann erfüllt, wenn die rechte und die linke Seite identisch ist.

**Gegeben:** Masse- (Energie) und Impulsverteilung in einem Raumgebiet

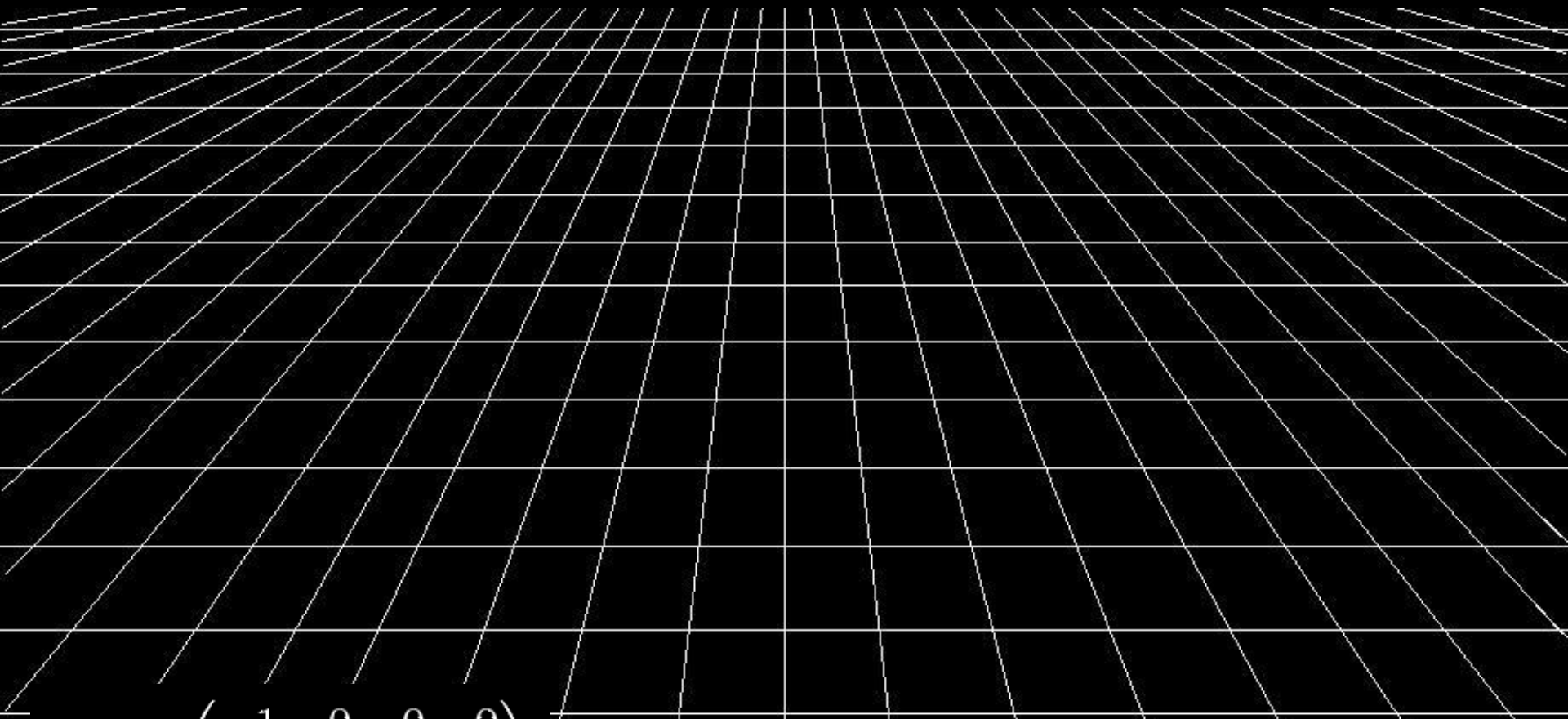
**Lösung:** Krümmung der Raum-Zeit in diesem Raumgebiet

Die Lösung wird gewöhnlich in Form einer **Metrik** angegeben, d.h. man berechnet die Größe der einzelnen Komponenten des Metrischen Tensors  $g$

Der **Metrische Tensor** bestimmt das **Linielement**  $ds$  (die Metrik) in diesem Raumbereich. **Deshalb wird gewöhnlich die Metrik, welche die Einsteinschen Feldgleichungen für eine gegebene Masseverteilung genügt, als Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.**



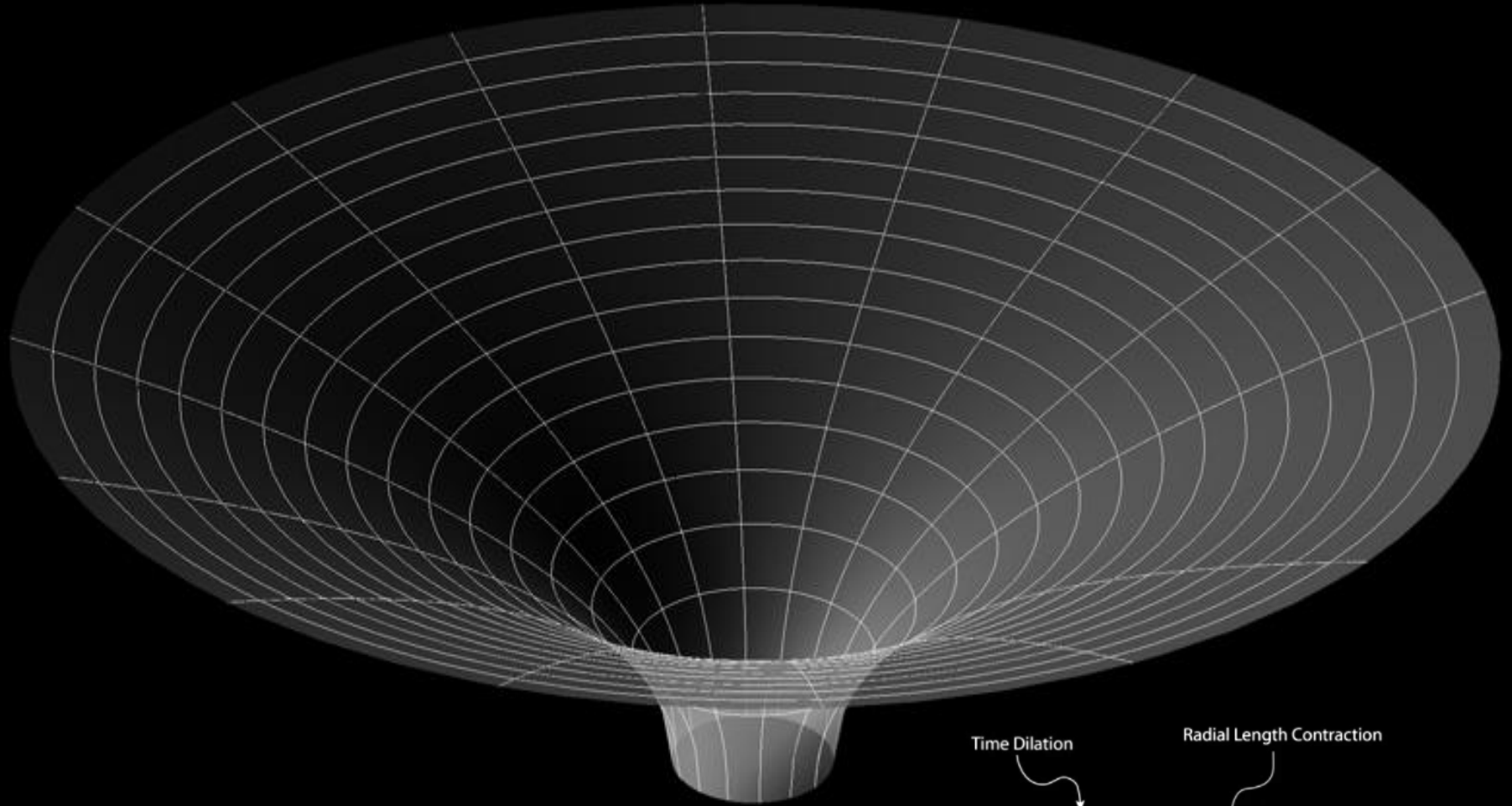
# Beispiel: Flache Raum-Zeit (Minkowski-Welt)



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

# Beispiel: Äußere Schwarzschild - Raum-Zeit



$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Time Dilation

Radial Length Contraction

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Invariant Line Element

Schwarzschild Radius

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$



# Beispiele für benannte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

Es ist äußerst schwierig, exakte Lösungen zu gewinnen. Deshalb werden heute für von Idealfällen abweichende Konfigurationen numerische Näherungsmethoden verwendet. Exakte Lösungen werden gewöhnlich nach den Personen benannt, die sie gefunden haben.

## Beispiele (Sterne, Planeten):

a) ungeladene, nichtrotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (Himmelsmechanik)

**Schwarzschild-Lösung (!)**

b) ungeladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (realistisches Black hole)

**Kerr-Lösung (!)**

c) geladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (unrealistisch)

**Reissner-Nordström-Lösung**

## Beispiele (kosmologische Lösungen):

a) materiefreier Raum (Vakuumlösung + kosmologisches Glied)

**De Sitter-Lösung + Anti-De Sitter-Lösung**

b) kosmischer Raum mit gleichförmig – isotroper Materieverteilung (Standardkosmologie)

**Friedman – Robertson – Walker-Lösung (!)**

c) Modelle mit positiver kosmologischer Konstante

**Eddington - Lemaitre-Lösung**

d) Lösung mit Anfangsinflation (inflationäres Weltmodell)

**Inflationäres Weltmodell (!)**

e) Rotierendes Universum

**Gödel-Kosmos**



# Die „Entdeckung“ der „Schwarzen Löcher“

Die Hypothese, dass es Sterne gibt, von denen keine Strahlung in den kosmischen Raum emittiert werden kann, geht auf den Begründer der Seismologie **John Michell** (1783) zurück und wurde später (1795) durch **Pierre de Laplace** theoretisch im Rahmen der Newtonschen Mechanik begründet.

## **Frage:**

Ab welcher Sternmasse wird die Fluchtgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit?

## **Antwort:**

Ein Stern, der 500x so groß ist wie die Sonne, erfüllt diese Bedingung

Pierre de Laplace : **Die größten Sterne werden für immer unsichtbar bleiben ...**

**Auch in der Newtonschen Mechanik gibt es das theoretische Konstrukt von Schwarzen Löchern.**

# Gravitationsfeld einer statischen kugelsymmetrischen Masse

1916: Albert Einstein veröffentlicht die korrekten Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im gleichen Jahr findet der deutsche Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) eine der ersten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für eine statische, kugelsymmetrische Masseverteilung.

- **Äußere Schwarzschild-Lösung** (äußeres Gravitationsfeld eines Sterns)
- **Innere Schwarzschildlösung** (Gravitationsfeld im Inneren eines Sterns)

Die **äußere Schwarzschild-Lösung** beschreibt die Raum-Zeit-Krümmung im Außenraum einer nichtrotierenden, ungeladenen kugelsymmetrischen Massenverteilung und ersetzt im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie das Newton'sche Gravitationsgesetz.



Ein „Objekt“ **SCHWARZES LOCH** wurde aber damals nicht diskutiert...

# Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der EINSTEINSchen Theorie.

VON K. SCHWARZSCHILD.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

§ 1. Hr. EINSTEIN hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\left. \begin{aligned} \delta \int ds &= 0, \\ ds &= \sqrt{\sum g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} (1)$$

ist,  $g_\alpha$  Funktionen der Variablen  $x$  bedeuten und bei der Variation am Anfang und Ende des Integrationswegs die Variablen  $x$  festzuhalten sind. Der Punkt bewege sich also, kurz gesagt, auf einer geodätischen Linie in der durch das Linienelement  $ds$  charakterisierten Mannigfaltigkeit.

Die Ausführung der Variation ergibt die Bewegungsgleichungen des Punktes

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

wobei

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} \right)$$

# Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der EINSTEINSchen Theorie.

VON K. SCHWARZSCHILD.

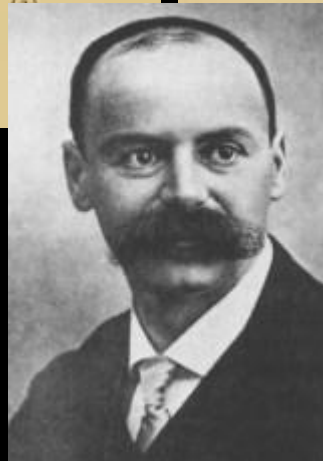
(Vorgelegt am 24. Februar 1916 [s. oben S. 313].)

§ 1. Als ein weiteres Beispiel zur EINSTEINSchen Gravitationstheorie habe ich das Gravitationsfeld einer homogenen Kugel von endlichem Radius, die aus inkompressibler Flüssigkeit besteht, berechnet. Der Zusatz »aus inkompressibler Flüssigkeit« ist erforderlich, weil in der Relativitätstheorie die Gravitation nicht nur von der Menge der Materie, sondern auch von deren Energie abhängt und z. B. ein fester Körper von bestimmtem Spannungszustand eine andere Gravitation geben würde als eine Flüssigkeit.

Die Rechnung bildet eine unmittelbare Fortsetzung meiner Mitteilung über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes (diese Sitzungsberichte 1916, S. 189), welche ich kurz mit »Massenpunkt« zitieren werde.

§ 2. Die EINSTEINSchen Feldgleichungen der Gravitation (diese Sitzungsber. 1915, S. 845) lauten allgemein:

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = G_{\alpha\alpha}. \quad (1)$$

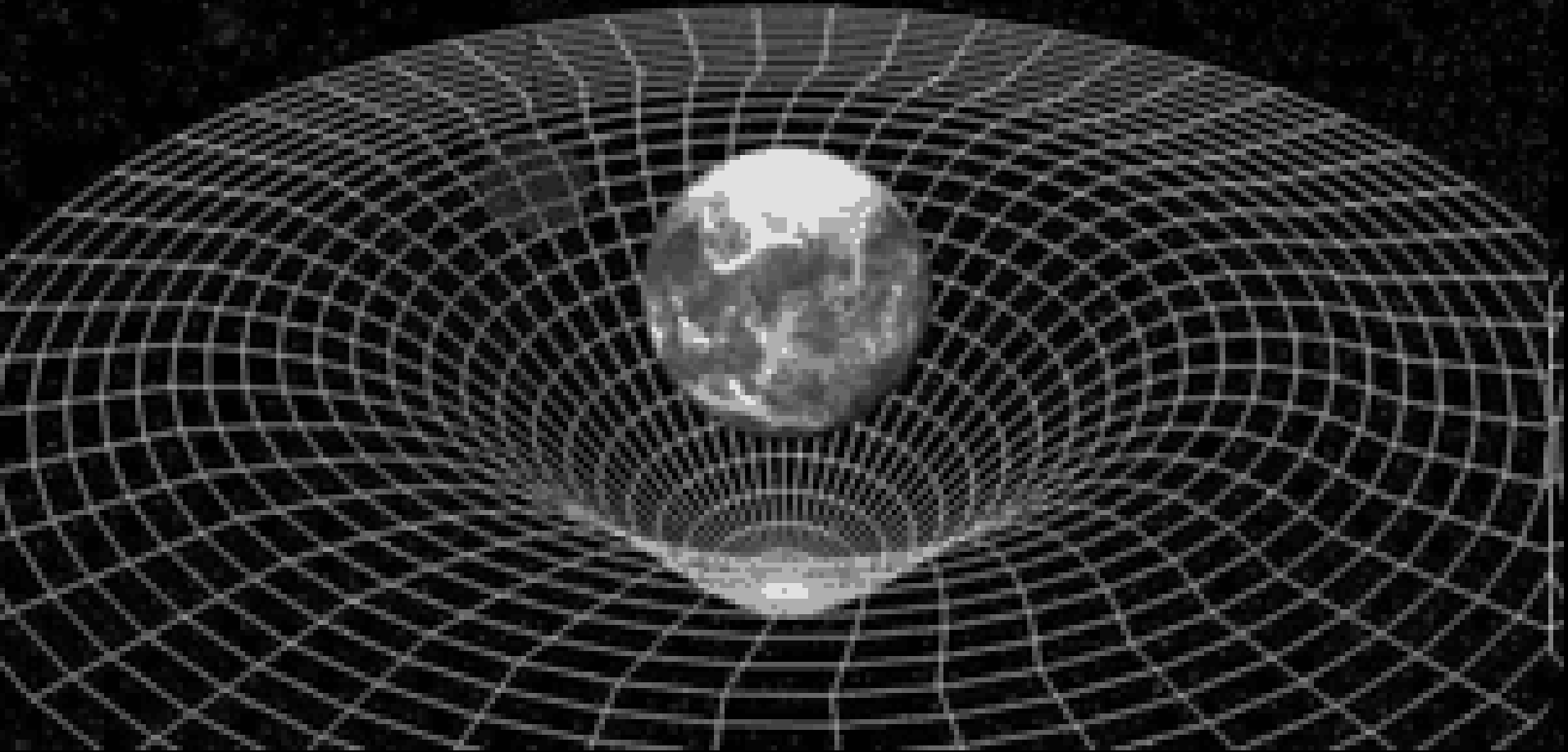


Schwarze Löcher

Allgemeinrelativistische Himmelsmechanik

Neutronensterne

# Äußere Schwarzschildlösung



$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2$$

# Der Schwarzschild-Radius

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2$$



Wenn

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

wird der metrische Koeffizient

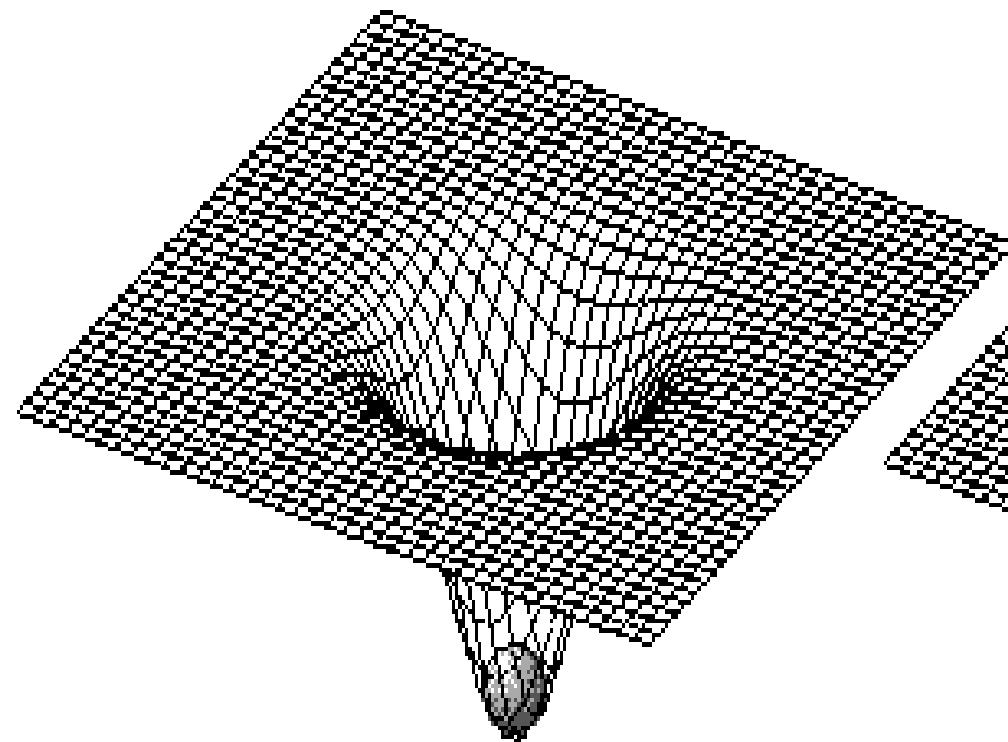
$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \text{ singularär.}$$

---

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

**Schwarzschild-Radius**

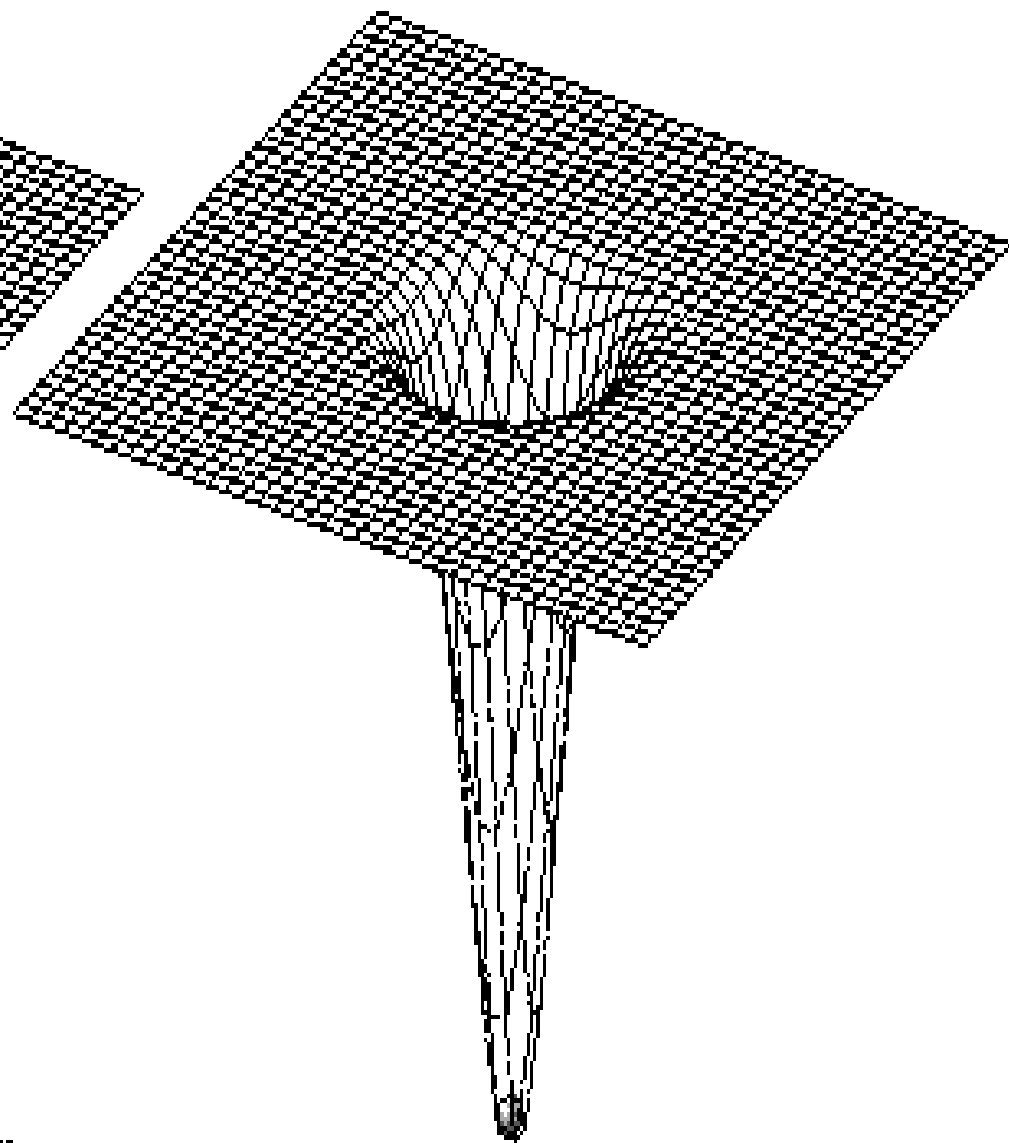




**Usual star**

**General Relativity :**

Einstein describes gravity as a deformation of space-time around a massive object.



**Neutron star**

# Singularitäten in der Schwarzschild-Metrik

Wie Eddington und Finkelstein zeigen konnten, handelt es sich bei der Singularität bei  $r = r_s$  um eine „hebbare“ Singularität, die nur von der Wahl des Koordinatensystems (hier Kugelkoordinaten) abhängt. Die Singularität bei  $r=0$  ist dagegen „echt“ und kann nicht wegtransformiert werden.

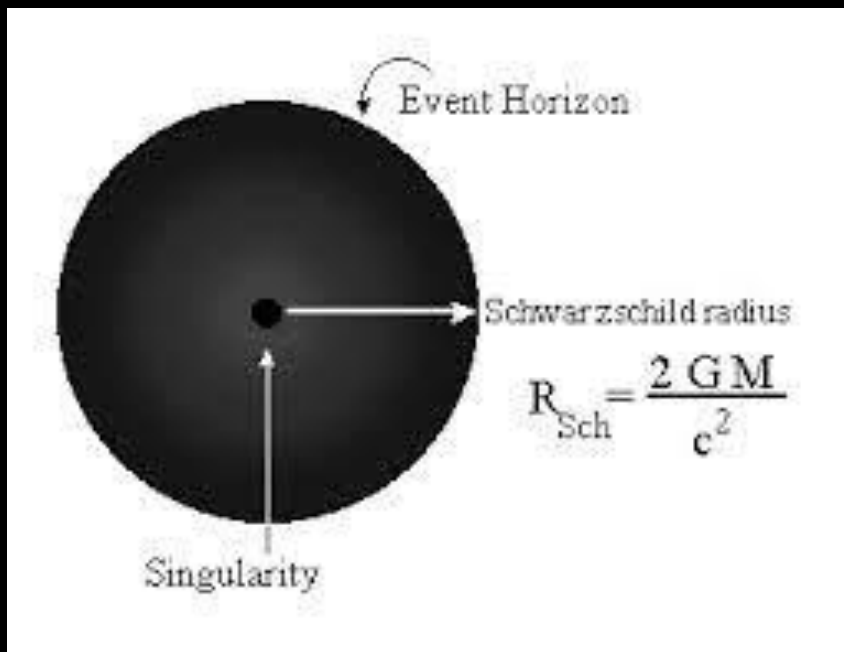
Da die Größe  $r_s$  sehr klein ist und die Singularität der Metrik an dieser Stelle behoben werden kann, gab es keine Veranlassung, für den Schwarzschildradius eine physikalische Interpretation einzuführen. Alle Himmelskörper, die bis dahin bekannt waren, hatten Radien weit oberhalb ihres Schwarzschildradius.

**Für Einstein und Co. waren das, was man später einmal „Schwarze Löcher“ nennen wird, kein Thema!**



# Kurze (relativistische) Phänomenologie statischer Schwarzer Löcher

Eine wesentliche Kenngröße eines Schwarzschild-Lochs ist der Radius seines Ereignishorizontes → **SCHWARZSCHILD-RADIUS**



OBJEKT	MASSE	S-Radius
Planck-Masse	$2.18 \times 10^{-8}$ kg	$3.23 \times 10^{-35}$ m
Mensch	70 kg	$1.04 \times 10^{-25}$ m
Erde	$5.97 \times 10^{24}$ kg	$8.87 \times 10^{-3}$ m
Sonne	$1.99 \times 10^{30}$ kg	$2.95 \times 10^3$ m
BH Milchstraße	$8.2 \times 10^{36}$ kg	0.08 AU
TON 618	$1.3 \times 10^{41}$ kg	~1300 AU
Universum	$8.8 \times 10^{52}$ kg	13.7 Milliarden Lj.

46,4 Milliarden Lj.

Der Schwarzschild-Radius hängt nur von der Masse eines Objekts ab (d. h. er kann als Synonym für dessen gravitativ wirkende Masse verwendet werden.



**Gravitationsradius einer Masse**

Die durch die Koordinatensingularität der Schwarzschild-Metrik ausgezeichnete 2d-Hyperfläche mit dem Radius = Schwarzschildradius um eine kollabierte Masse („Schwarzes Loch“) bezeichnet man als „**Ereignishorizont**“.

Der **Ereignishorizont** stellt eine geschlossene Fläche im Raum dar, die Ereignisse, die sich innerhalb dieser Fläche ereignen, kausal von Ereignissen, die sich außerhalb dieser Fläche ereignen, trennt.

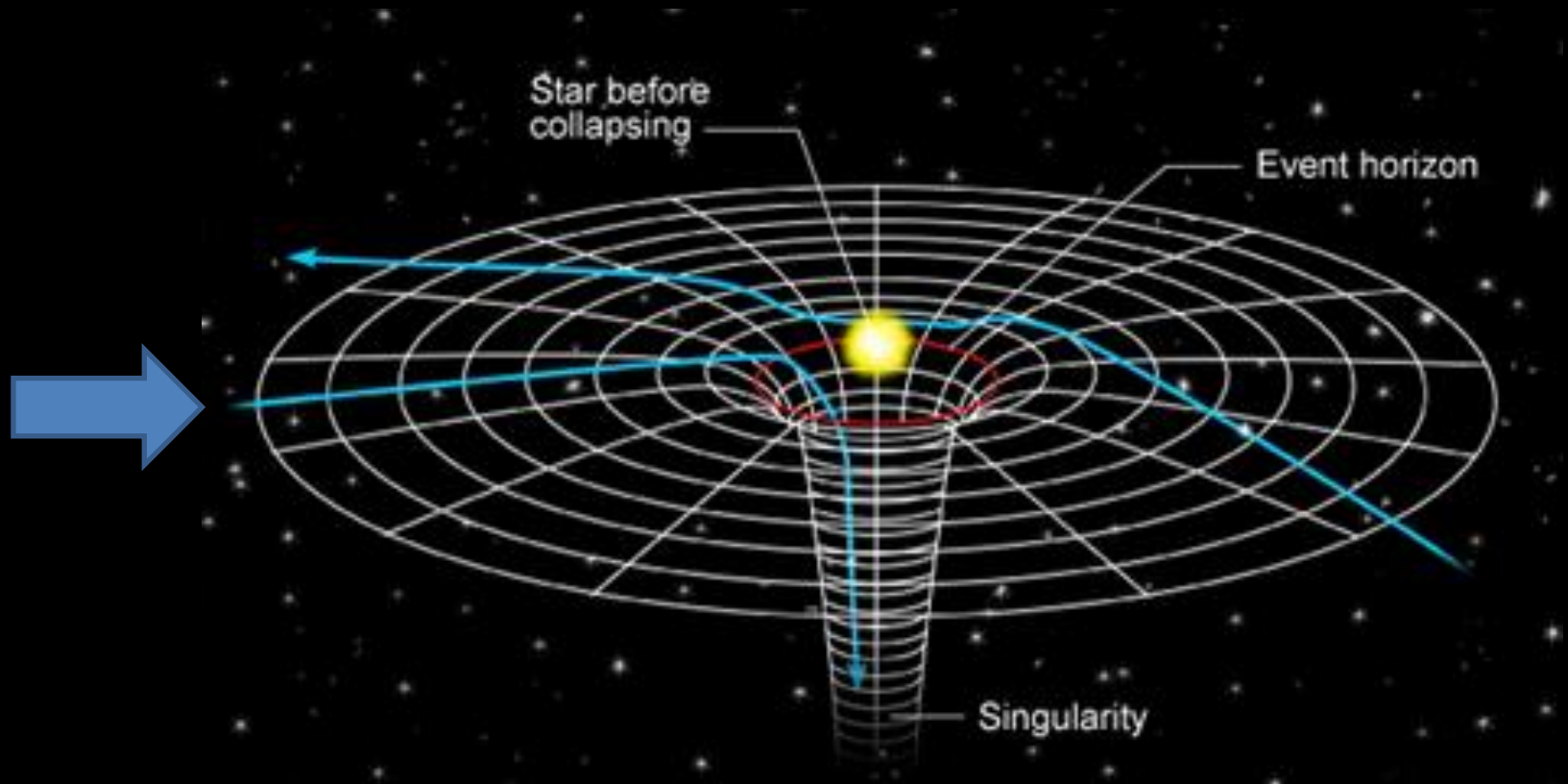
d. h. es gibt keine Möglichkeit für einen Beobachter innerhalb des Ereignishorizonts Ereignisse außerhalb dessen zu beeinflussen oder zu induzieren – umgekehrt ist das durchaus möglich.

→ „Halbdurchlässige Membran für Informationen“

- Die Fläche des Ereignishorizonts ist entweder konstant oder kann (durch Masseinfall) nur anwachsen.
- Der Ereignishorizont ist keine gegenständliche Grenze. Ein frei fallender Beobachter kann daher nicht direkt feststellen, wann er den Ereignishorizont passiert.

# Freier Fall in ein Schwarzschild-Black hole

→ Bewegung entlang einer radialen Geodäte



# Zwei Bezugssysteme:

## a) frei fallender Beobachter

- Bewegt sich beschleunigt radial in Richtung Zentrum des Black holes **und erreicht es in endlicher Eigenzeit** (das ist die Zeit, die seine Armbanduhr anzeigt).
- Er **bemerkt beim „Durchfliegen“ des Ereignishorizonts keine Besonderheiten**, außer dass er prinzipiell nicht mehr in der Lage ist (wie auch immer) umzukehren...
- Mit Annäherung an die Singularität nehmen die **Gezeitenkräfte** immer mehr zu („Spaghettisierung der Materie“)

## b) weit entfernter Beobachter

- Er beobachtet, wie mit Annäherung an den Ereignishorizont der Abstand zwischen zwei Sekundenschlägen auf der Uhr des frei fallenden Beobachters immer größer wird. Das führt dazu, dass er den frei fallenden Beobachter sich asymptotisch den Ereignishorizont nähern sieht, ohne dass er ihn in endlicher Zeit (gemessen auf der Uhr des entfernten Beobachters) jemals erreicht. **Der Fall in das Black hole dauert unendlich lange...**
- Damit ist auch ein Intensitätsverlust (Gravitations-Rotverschiebung) verbunden, der es unmöglich macht, den fallenden Beobachter bis zum Ereignishorizont zu verfolgen, da er bereits davor unsichtbar wird. **Am Ereignishorizont wird die Gravitationsrotverschiebung unendlich groß.**



Radial frei fallende Beobachter

$$v = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

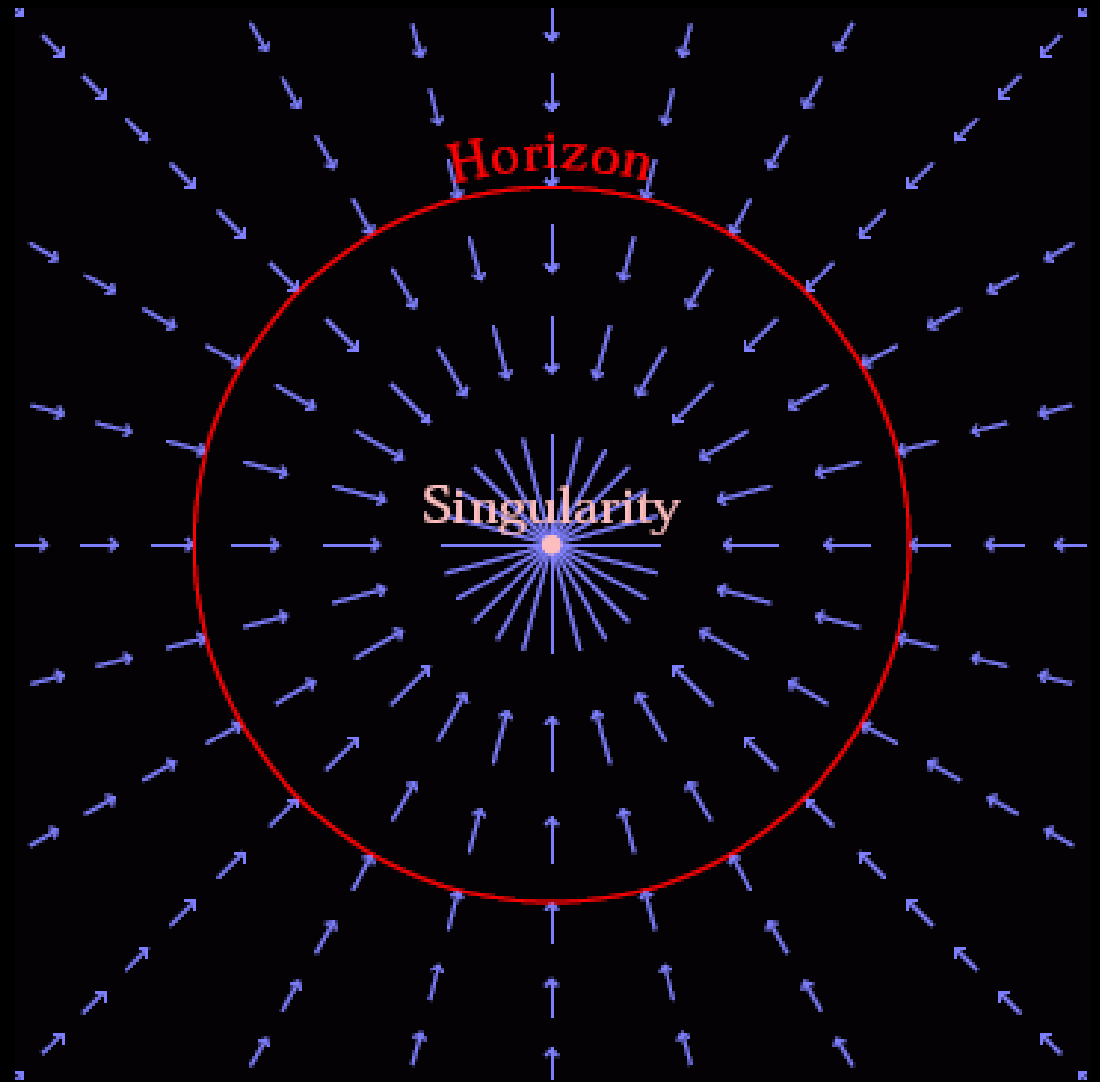
„Newtonsche“ Fallgeschwindigkeit

Galaktisches Black hole  
= 5 Millionen Sonnenmassen



Fallzeit (Eigenzeit des frei fallenden Beobachters) vom Schwarzschild-Horizont bis zur Singularität (0,08 AU):

16 Sekunden



Gullstrand-Painlevé Metrik



# Die Zentralsingularität

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die gesamte Masse eines Schwarzschild-Black holes in einem (unendlich) kleinen Punkt in dessen Zentrum konzentriert (= Ort unendlich großer Krümmung; „Zusammenbruch der Physik“)

→ **ZENTRALSINGULARITÄT** (Massendichte geht gegen Unendlich)

## Hawking-Penrose-Theorem:

Die Zentralsingularität lässt sich im Rahmen der ART prinzipiell nicht vermeiden

**Ein Black hole ist deshalb auch kein „Stern“, sondern nur eine Anomalie der RaumZeit!**

Die Zentralsingularität eines Schwarzschild-Lochs ist für einen äußeren Beobachter verborgen (d. h. nicht sichtbar) → **Cosmic Censorship – Hypothese** (Roger Penrose)

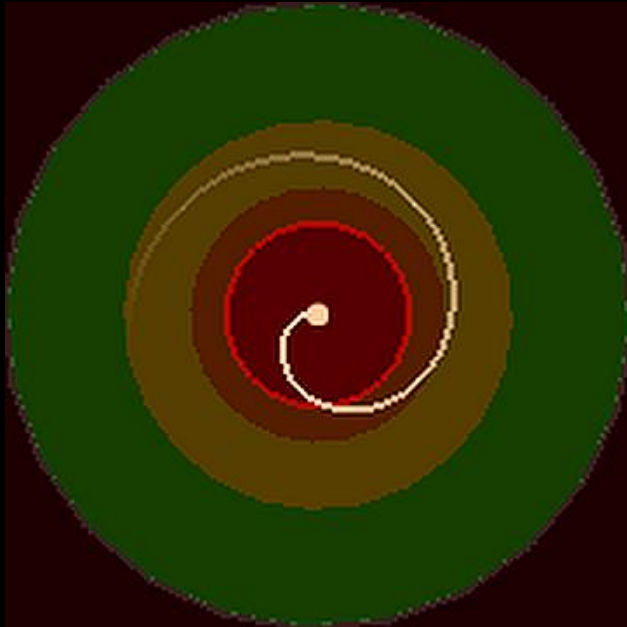
Die Masse  $M$  ist der einzige Parameter eines statischen Schwarzschild-Lochs. Sie kann nur anwachsen. (II. Hauptsatz der Physik Schwarzer Löcher)

Eine **Punktsingularität mit unendlich hoher Dichte ist unphysikalisch**. Sie lässt sich aber nur durch eine modifizierte ART vermeiden, will man in der klassischen Theorie (d. h. ohne die Berücksichtigung von Quanteneffekten) bleiben. Eine Theorie, die das leistet, stammt von Walter Greiner, ist aber umstritten und auch nicht falsifizierbar.

Das **Singularitätenproblem** lässt sich wahrscheinlich nur im Rahmen der Quantengravitation lösen. Dafür gibt es aber nur eine Vielzahl theoretischer Ansätze weitab experimenteller Überprüfbarkeit. Eine Vereinigung von ART und QM ist extrem schwierig, da sich die theoretischen Ansätze (hier Geometrie einer gekrümmten Raum-Zeit – da relativistische Quantenfeldtheorie) methodisch vollkommen unterscheiden.

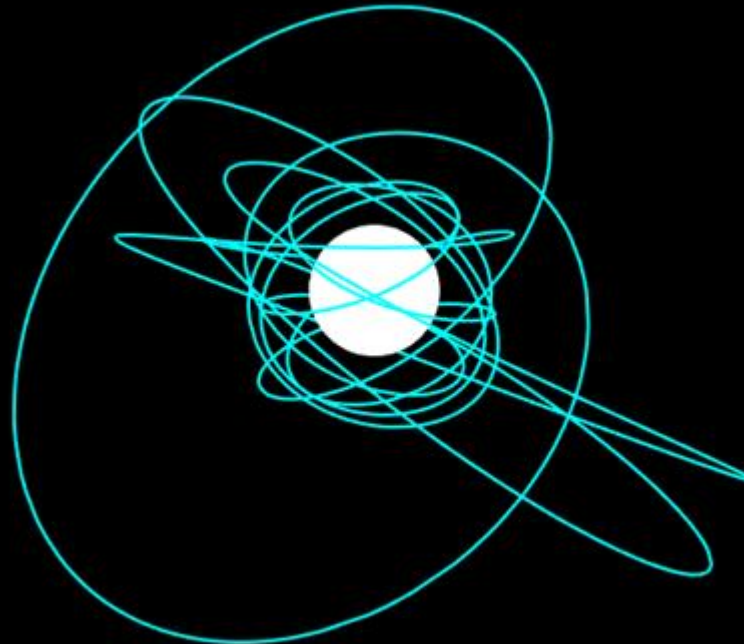
→ partielle Ansätze: Thermodynamik Schwarzer Löcher (Hawking-Effekt, Entropie)

# Teilchenbahnen um Schwarzschild-Löcher

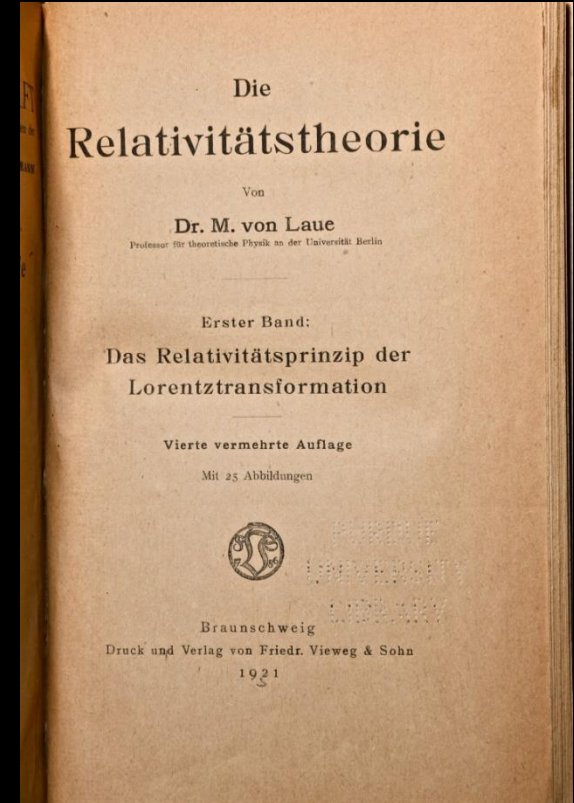
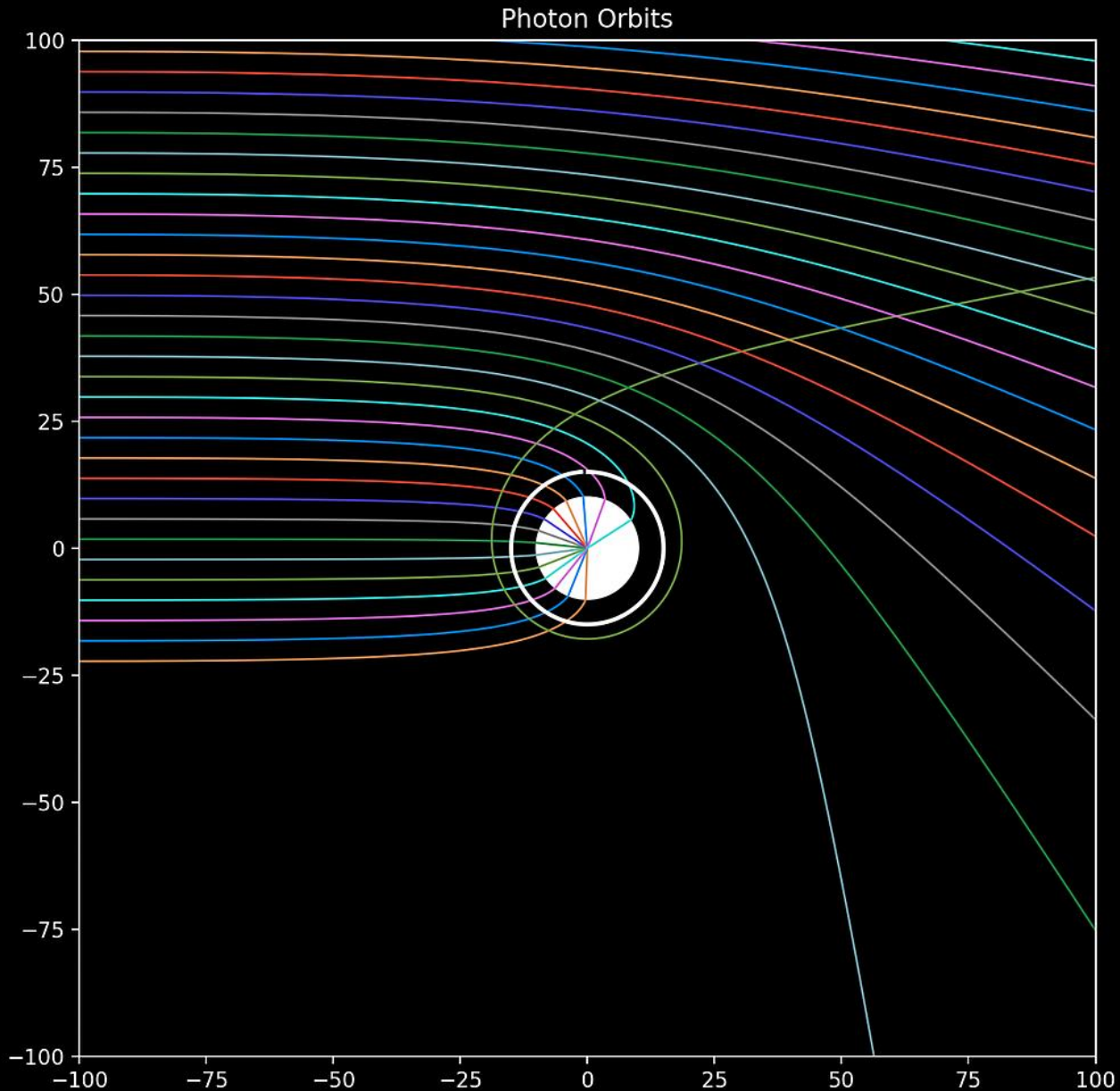


Farbe	Zone
Grün	Stabile Kreisbahnen
Gelb	Instabile Kreisbahnen
Orange	Keine Kreisbahnen
rote Linie	Horizont
rot	Hinter dem Horizont

Kreisbahnen um ein Black hole



# Photonenbahnen um Schwarzschild-Löcher



$$r_{ph} = \frac{3GM}{c^2}$$

Bedingung für kreisförmige  
Photonenbahnen

# Die Photonensphäre

Als **Photonensphäre** bezeichnet man die Fläche um ein Schwarzes Loch, auf der alle instabilen Photonenorbits liegen.



Wenn man von einem Ort der Photonensphäre nach außen blickt, würde der halbe Himmel völlig schwarz erscheinen, die andere Hälfte wäre relativ hell, und was sich hinter dem Kopf befindet, würde in der Mitte erscheinen.

Himmelsansicht  
50% außerhalb des Ereignishorizonts

