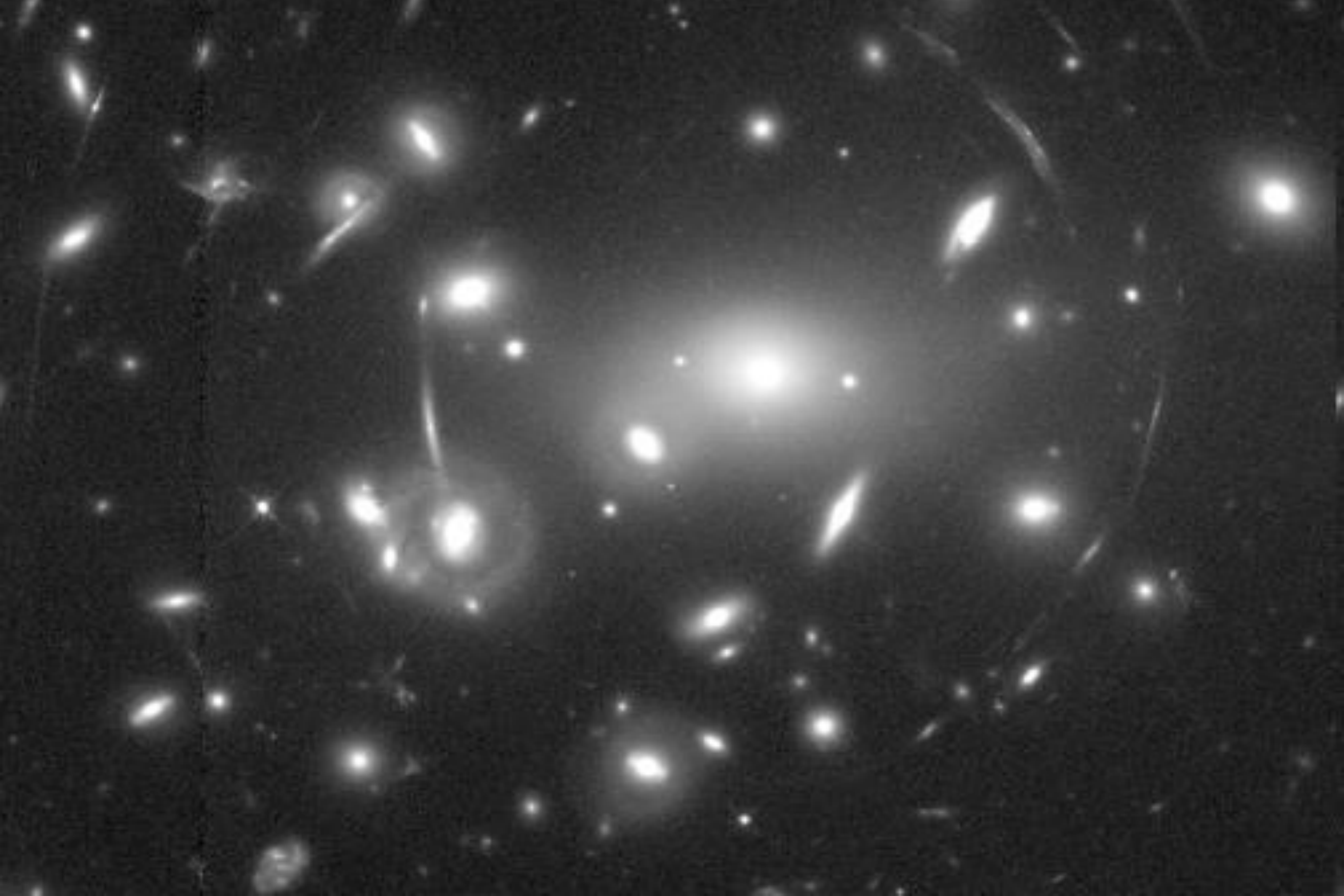
Einsteinsche Feldgleichungen und ihre Lösungen



Die Beschleunigung, die wir relativ zu den nicht-frei fallenden Bezugssystem erfahren, hängt von der lokalen Krümmung der Raum-Zeit ab.

- keine Krümmung – keine Beschleunigung – keine Gravitation
- schwache Krümmung – geringe Beschleunigung – geringe Gravitation
- starke Krümmung – starke Beschleunigung – starke Gravitation

Frage: Was krümmt die Raum-Zeit?

Antwort (Einstein 1916): Die Krümmung wird durch die lokale Energie- und Impulsdichte verursacht.
(vereinfacht ausgesprochen, Massen und Masseströmungen krümmen die Raum-Zeit)

Beschrieben durch die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation

Einsteinsche Gravitationsfeldgleichungen

Formulierung des Phänomens der Gravitation mit den Mitteln der Differenzialgeometrie.

Die Grundidee ist dabei die Verknüpfung einer Energie-Impuls-Verteilung mit der Geometrie der Raumzeit

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik}$$

= 16 part. Differenzialgleichungen
→ wegen Symmetrie 10 Gleichungen

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = \boxed{-8\pi \frac{G}{c^4}} \mathbf{T}$$

Kurzform

Einsteinsche Gravitationskonstante

Kosmologisches Glied

Die Raumzeit wirkt auf die Masse (Energie), indem sie ihr sagt, wie sie sich bewegen soll; die Masse (Energie) wirkt umgekehrt auf die Raumzeit, indem sie ihr sagt, wie sie sich krümmen soll.

Was bedeutet „Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen“ ?

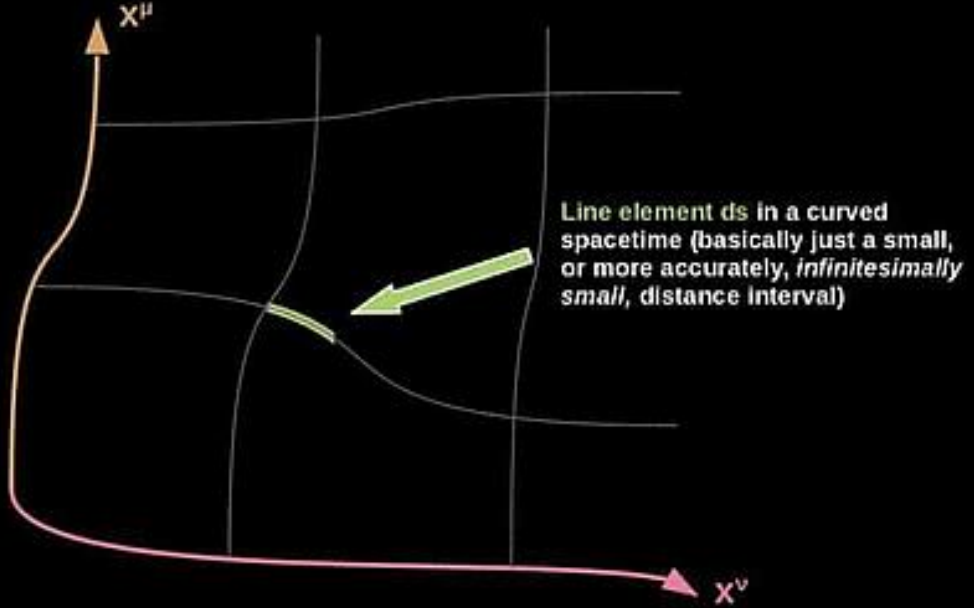
→ Eine Gleichung ist dann erfüllt, wenn die rechte und die linke Seite identisch ist.

Gegeben: Masse- (Energie) und Impulsverteilung in einem Raumgebiet

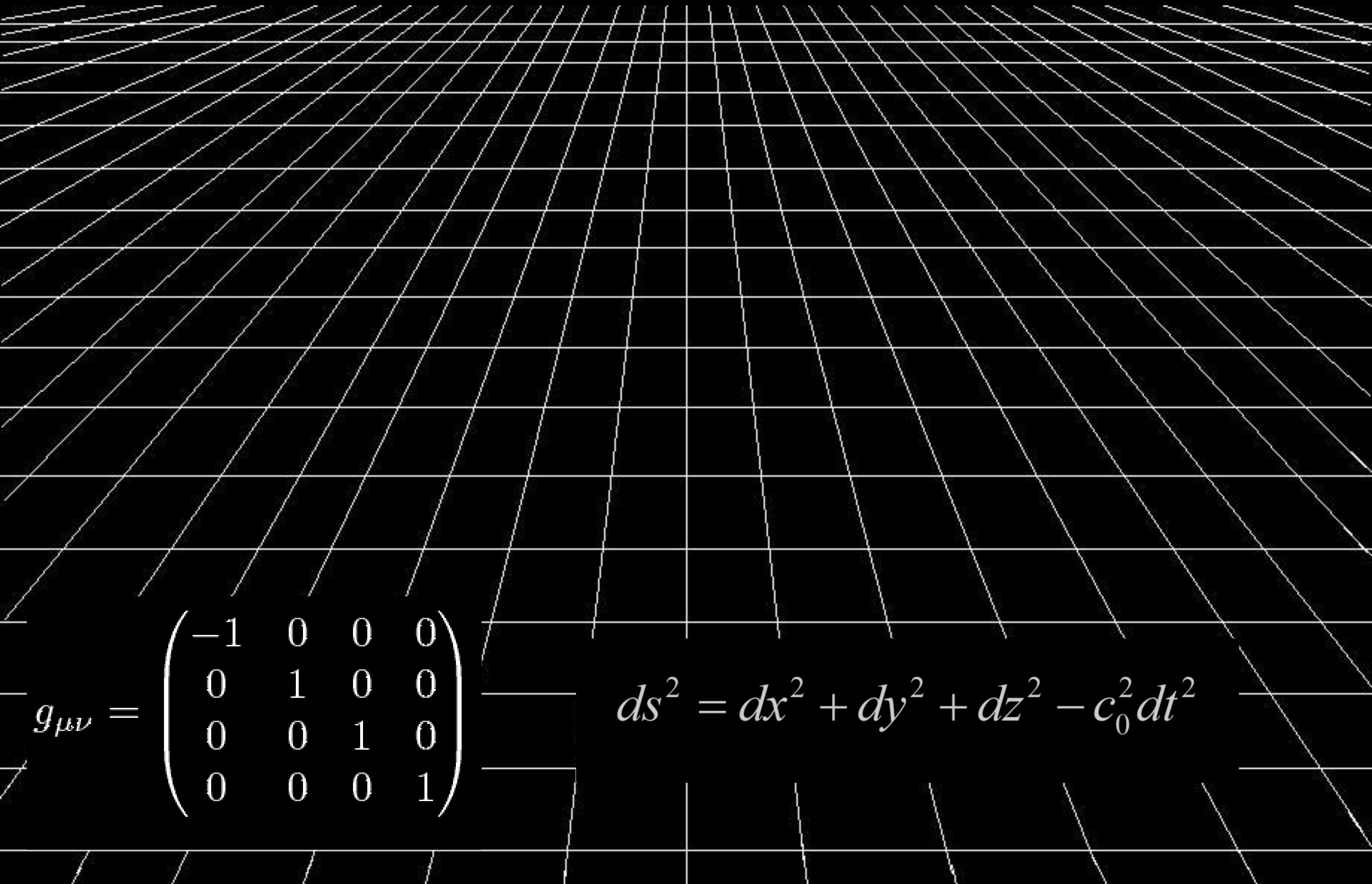
Lösung: Krümmung der Raum-Zeit in diesem Raumgebiet

Die Lösung wird gewöhnlich in Form einer **Metrik** angegeben, d.h. man berechnet die Größe der einzelnen Komponenten des Metrischen Tensors **g**

Der **Metrische Tensor** bestimmt das **Linienelement** *ds* (die Metrik) in diesem Raumbereich. Deshalb wird gewöhnlich die Metrik, welche die Einsteinschen Feldgleichungen für eine gegebene Masseverteilung genügt, als Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.



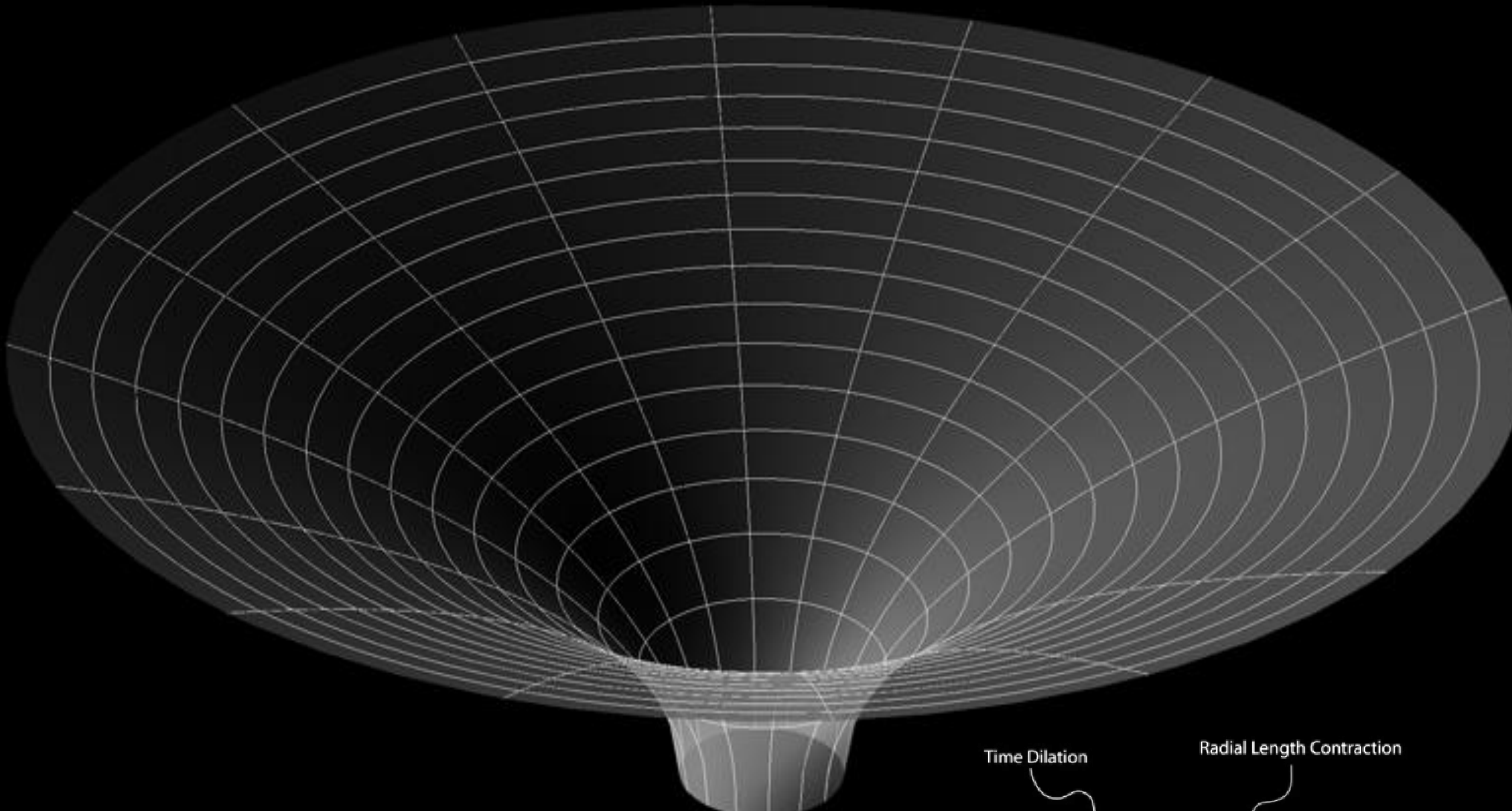
Beispiel: Flache Raum-Zeit (Minkowski-Welt)



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

Beispiel: Äußere Schwarzschild - Raum-Zeit



Time Dilation

Radial Length Contraction

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

Invariant Line Element

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Schwarzschild Radius

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Beispiele für benannte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

Es ist äußerst schwierig, exakte Lösungen zu gewinnen. Deshalb werden heute für von Idealfällen abweichende Konfigurationen numerische Näherungsmethoden verwendet. Exakte Lösungen werden gewöhnlich nach den Personen benannt, die sie gefunden haben.

Beispiele (Sterne, Planeten):

a) ungeladene, nichtrotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (Himmelsmechanik)

Schwarzschild-Lösung (!)

b) ungeladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (realistisches Black hole)

Kerr-Lösung (!)

c) geladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (unrealistisch)

Reissner-Nordström-Lösung

Beispiele (kosmologische Lösungen):

a) materiefreier Raum (Vakuumlösung + kosmologisches Glied)

De Sitter-Lösung + Anti-De Sitter-Lösung

b) kosmischer Raum mit gleichförmig – isotroper Materieverteilung (Standardkosmologie)

Friedman – Robertson – Walker-Lösung (!)

c) Modelle mit positiver kosmologischer Konstante

Eddington - Lemaitre-Lösung

d) Lösung mit Anfangsinflation (inflationäres Weltmodell)

Inflationäres Weltmodell (!)

e) Rotierendes Universum

Gödel-Kosmos

Die „Entdeckung“ der „Schwarzen Löcher“

Die Hypothese, dass es Sterne gibt, von denen keine Strahlung in den kosmischen Raum emittiert werden kann, geht auf den Begründer der Seismologie **John Michell** (1783) zurück und wurde später (1795) durch **Pierre de Laplace** theoretisch im Rahmen der Newtonschen Mechanik begründet.

Frage:
Ab welcher Sternmasse wird die Fluchtgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit?

Antwort:
Ein Stern, der 500x so groß ist wie die Sonne, erfüllt diese Bedingung

Pierre de Laplace : Die größten Sterne werden für immer unsichtbar bleiben …

Auch in der Newtonschen Mechanik gibt es das theoretische Konstrukt von Schwarzen Löchern.

Gravitationsfeld einer statischen kugelsymmetrischen Masse

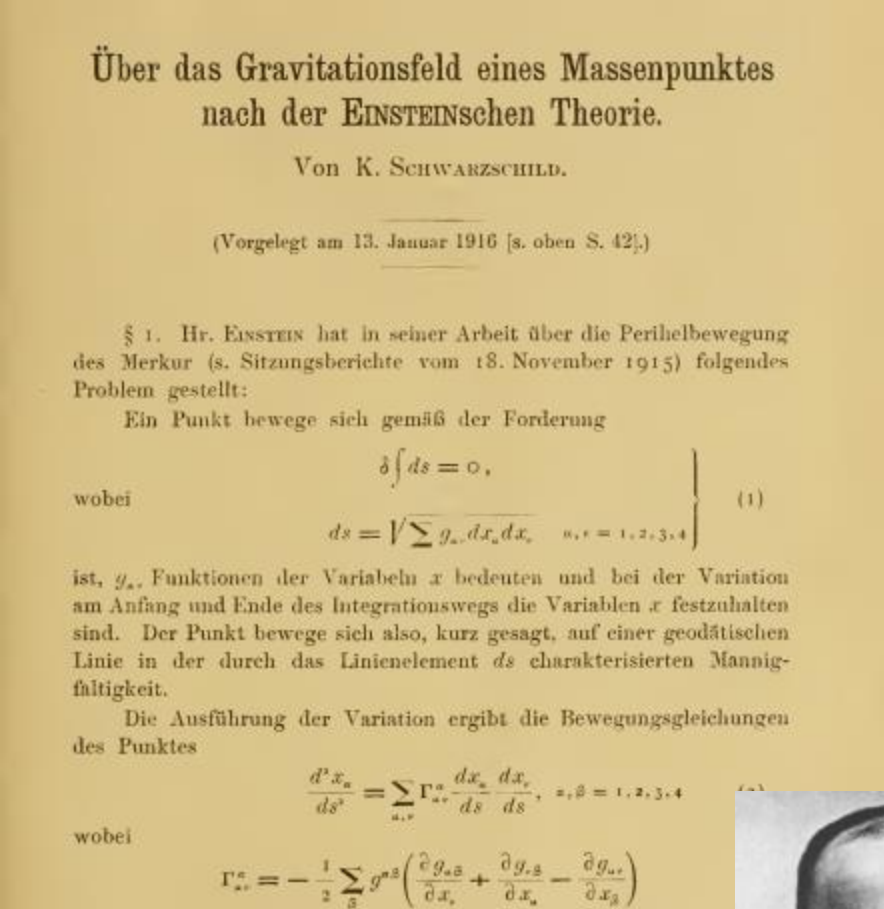
1916: Albert Einstein veröffentlicht die korrekten Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im gleichen Jahr findet der deutsche Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) eine der ersten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für eine statische, kugelsymmetrische Masseverteilung.

- **Äußere Schwarzschild-Lösung** (äußeres Gravitationsfeld eines Sterns)
- **Innere Schwarzschildlösung** (Gravitationsfeld im Inneren eines Sterns)

Die **äußere Schwarzschild-Lösung** beschreibt die Raum-Zeit-Krümmung im Außenraum einer nichtrotierenden, ungeladenen kugelsymmetrischen Massenverteilung und ersetzt im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie das Newton'sche Gravitationsgesetz.

Ein „Objekt“ **SCHWARZES LOCH** wurde aber damals nicht diskutiert...



Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

§ 1. Hr. Einstein hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\delta \int ds = 0, \qquad (1)$$

wobei

$$ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

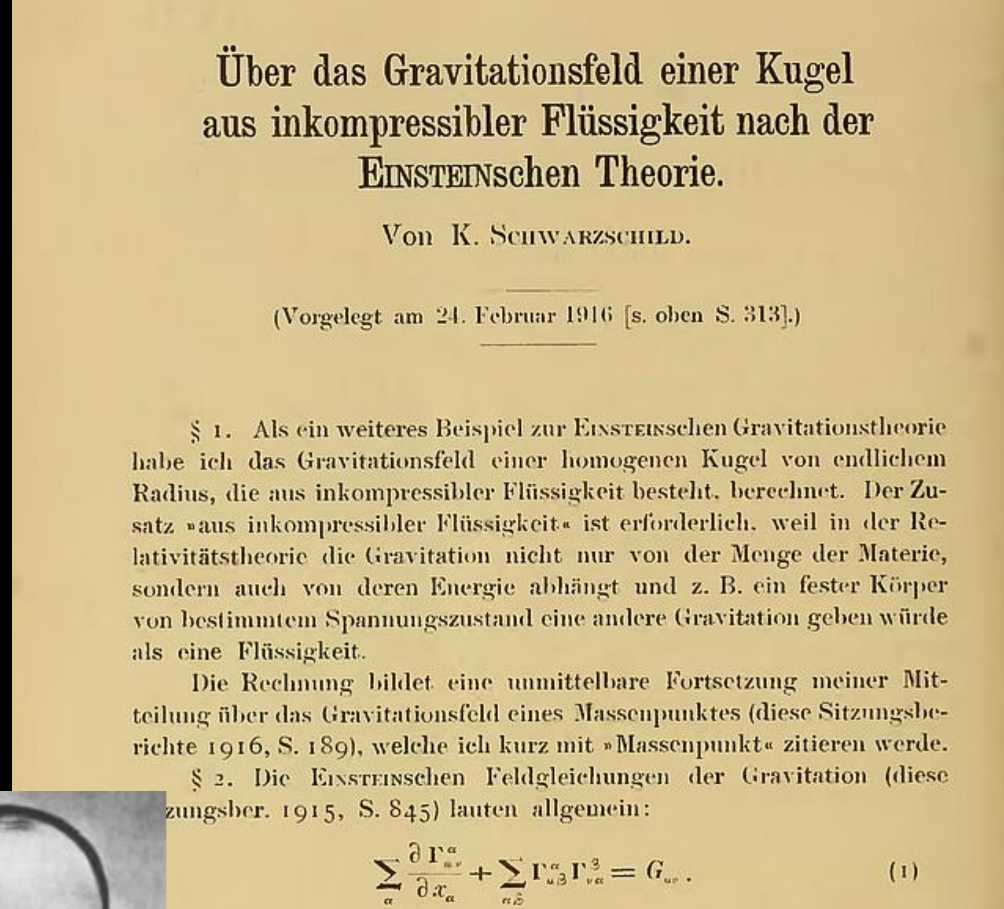
ist, $g_{\mu\nu}$ Funktionen der Variabeln x bedeuten und bei der Variation am Anfang und Ende des Integrationswegs die Variablen x festzuhalten sind. Der Punkt bewege sich also, kurz gesagt, auf einer geodätischen Linie in der durch das Linienelement ds charakterisierten Mannigfaltigkeit.

Die Ausführung der Variation ergibt die Bewegungsgleichungen des Punktes

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \qquad (2)$$

wobei

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right)$$



Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

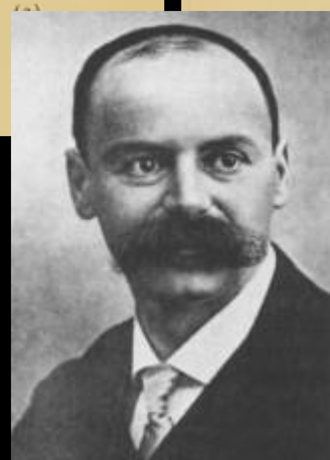
(Vorgelegt am 24. Februar 1916 [s. oben S. 313].)

§ 1. Als ein weiteres Beispiel zur Einsteinschen Gravitationstheorie habe ich das Gravitationsfeld einer homogenen Kugel von endlichem Radius, die aus inkompressibler Flüssigkeit besteht, berechnet. Der Zusatz »aus inkompressibler Flüssigkeit« ist erforderlich, weil in der Relativitätstheorie die Gravitation nicht nur von der Menge der Materie, sondern auch von deren Energie abhängt und z. B. ein fester Körper von bestimmtem Spannungszustand eine andere Gravitation geben würde als eine Flüssigkeit.

Die Rechnung bildet eine unmittelbare Fortsetzung meiner Mitteilung über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes (diese Sitzungsberichte 1916, S. 189), welche ich kurz mit »Massenpunkt« zitieren werde.

§ 2. Die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation (diese Sitzungsber. 1915, S. 845) lauten allgemein:

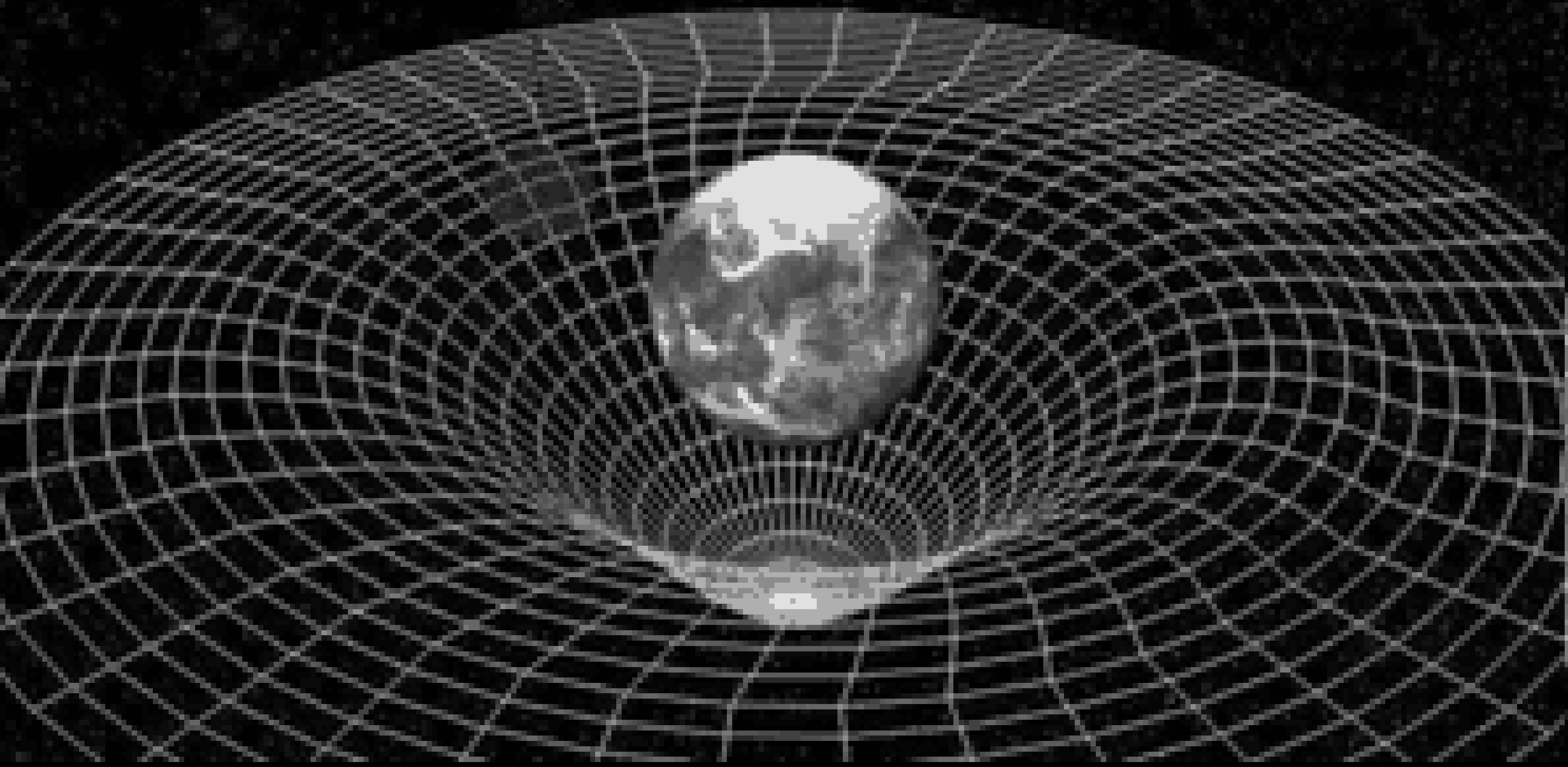
$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = G_{\mu\nu}. \qquad (1)$$



Schwarze Löcher
Allgemeinrelativistische Himmelsmechanik

Neutronensterne

Äußere Schwarzschildlösung



$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\phi^2 - \left(1-\frac{2GM}{r\,c^2}\right)c^2dt^2$$

Der Schwarzschild-Radius

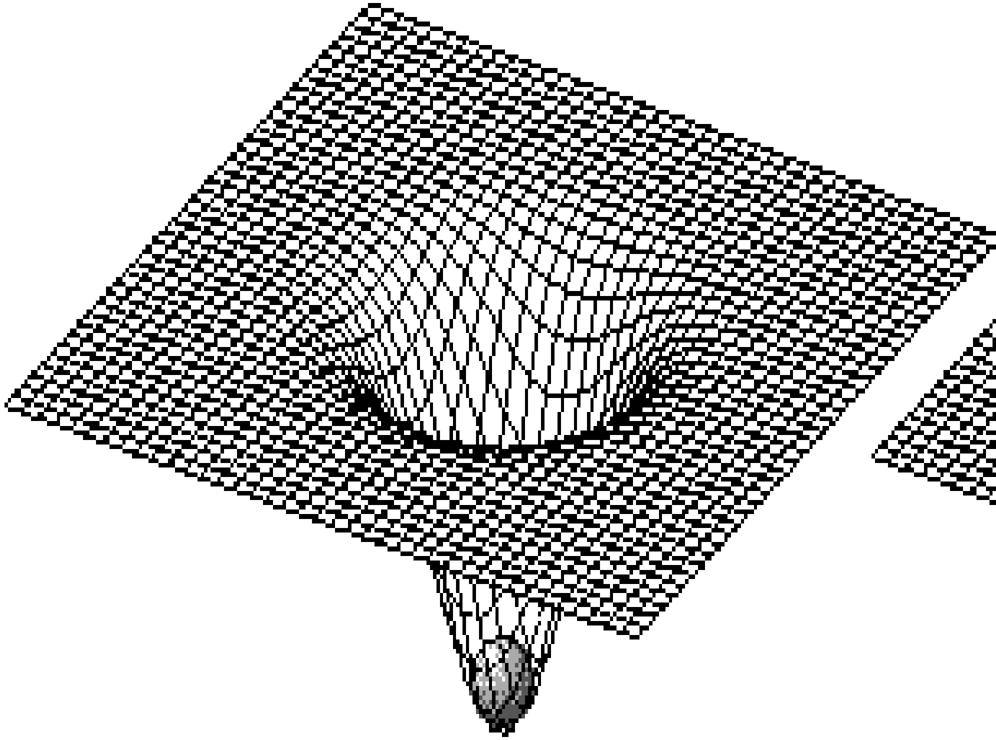
$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\phi^2 - \left(1-\frac{2GM}{r\,c^2}\right)c^2dt^2$$

$\Uparrow$

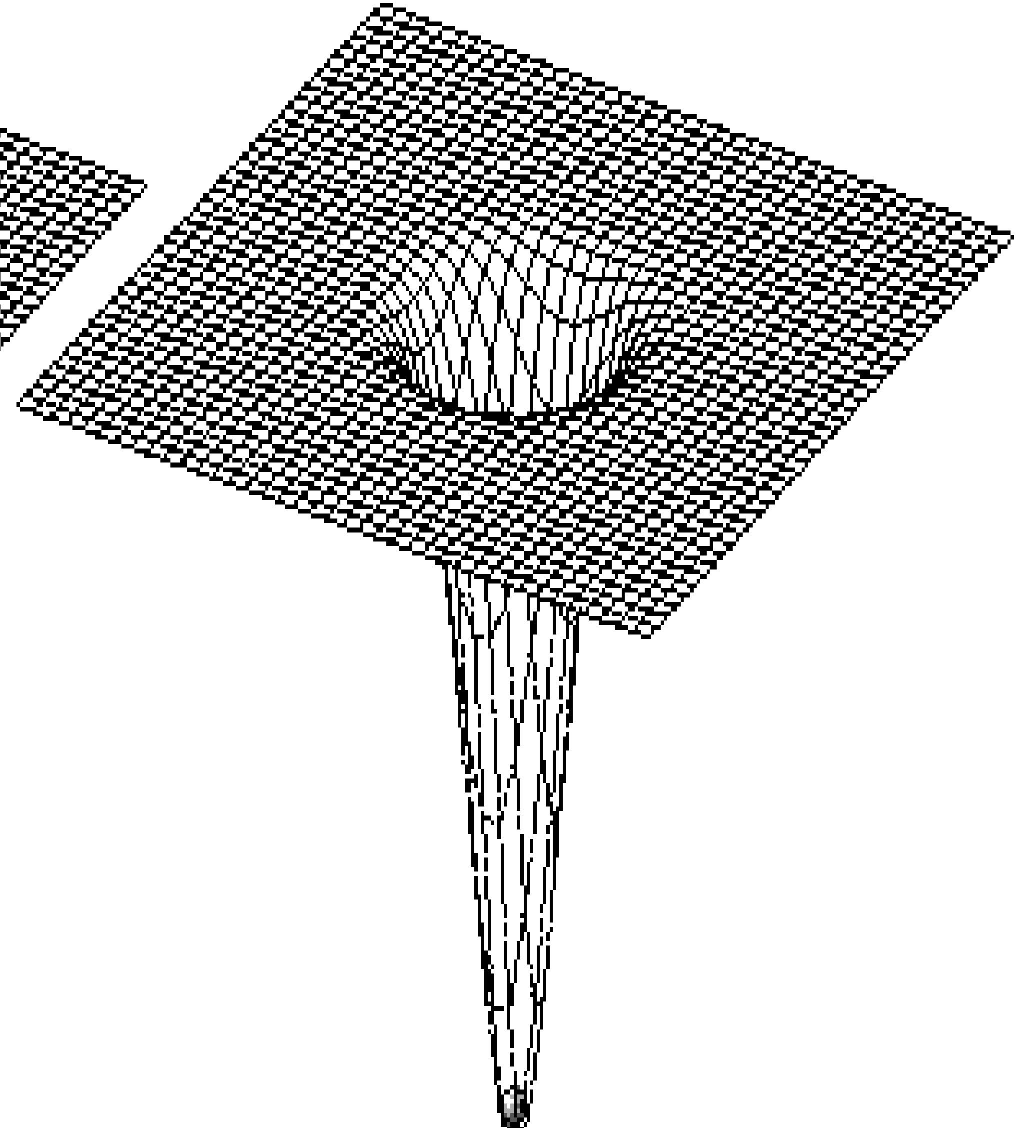
Wenn $r = \frac{2GM}{c^2}$ wird der metrische Koeffizient $g_{rr} = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}$ singulär.

$$r_s = \frac{2\,GM}{c^2}$$

Schwarzschild-Radius



Usual star



Neutron star

General Relativity :

Einstein describes gravity as a deformation of space-time around a massive object.

nrumiano

Singularitäten in der Schwarzschild-Metrik

Wie Eddington und Finkelstein zeigen konnten, handelt es sich bei der Singularität bei $r = r_s$ um eine „hebbare“ Singularität, die nur von der Wahl des Koordinatensystems (hier Kugelkoordinaten) abhängt. Die Singularität bei r=0 ist dagegen „echt“ und kann nicht wegtransformiert werden.

Da die Größe r_s sehr klein ist und die Singularität der Metrik an dieser Stelle behoben werden kann, gab es keine Veranlassung, für den Schwarzschildradius eine physikalische Interpretation einzuführen. Alle Himmelskörper, die bis dahin bekannt waren, hatten Radien weit oberhalb ihres Schwarzschildradius.

Für Einstein und Co. waren das, was man später einmal „Schwarze Löcher“ nennen wird, kein Thema!