

Anwendung der Topologie in der Kosmologie

Wie sieht das Universum aus?

Es geht hier um die topologische und geometrische Struktur des physikalischen Raumes und wie man sie durch Beobachtungen ermitteln kann.



Man muss unterscheiden:

- a) den physikalischen Ortsraum (3-dimensional, lokal euklidisch)
- b) den vierdimensionalen Ereignisraum (3+1-dimensional, lokal euklidisch) = „Raumzeit“

Der physikalische Raum ist eine der Erfahrung zugängliche Entität, dessen topologische und geometrische Struktur erforschbar ist.

Bevor man aber von einer „Struktur“ des physikalischen Raumes sprechen kann, muss man Begriffe definieren, mit der sich solch eine Struktur adäquat beschreiben lässt.

Mathematische Konzepte zur Beschreibung des physikalischen Raums

- Punktmenge
- Kontinuum
- Topologie
- Metrik

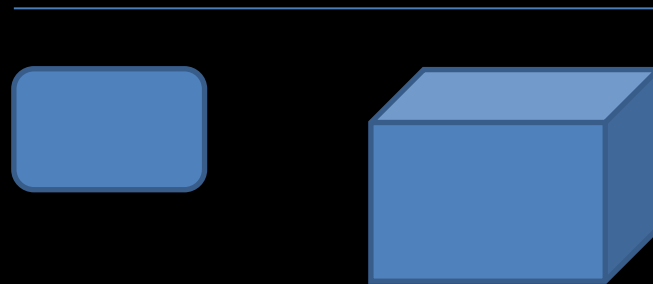
Das Abstraktum „Raum“

Man kann einen Raum als eine Menge von Punkten, die lückenlos dicht liegen („Orte“), abstrahieren. Einer solchen Punktmenge kann eine Topologie aufgeprägt sein.

→ Topologischer Raum

Die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade bestimmt die Dimensionszahl des Raumes

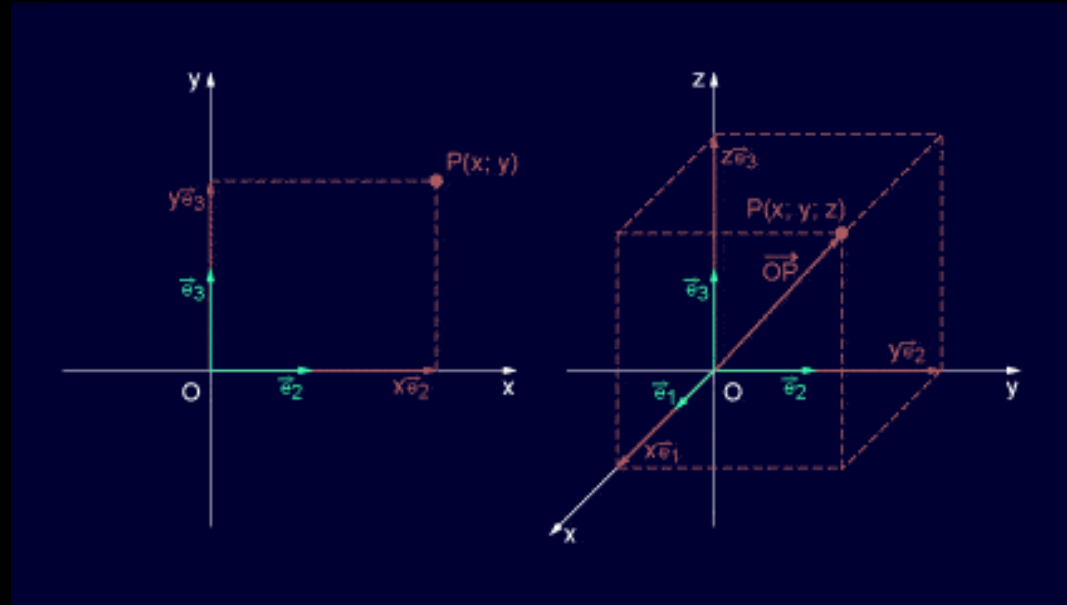
- n = 0 Punkt
- n = 1 Gerade
- n = 2 Fläche
- n = 3 Raum
- n = 4 4-dimensionaler Raum
- ...
- n = k k-dimensionaler Raum



Die „Punkte“ des Raumes werden in jede Koordinatenrichtung durch die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} (die lückenlos dicht liegen und von denen es in jedem Intervall $[a, b]$ unendlich viele gibt – Kontinuum) dargestellt.

Messen in Räumen – die Abstandsfunktion (Metrik) (*)

1. Einheitslänge festlegen
2. Koordinatensystem festlegen
3. Nullpunkt festlegen



1-dimensionaler Raum: Abstand d zum Nullpunkt = absoluter Betrag: $d(0, x) = |x|$

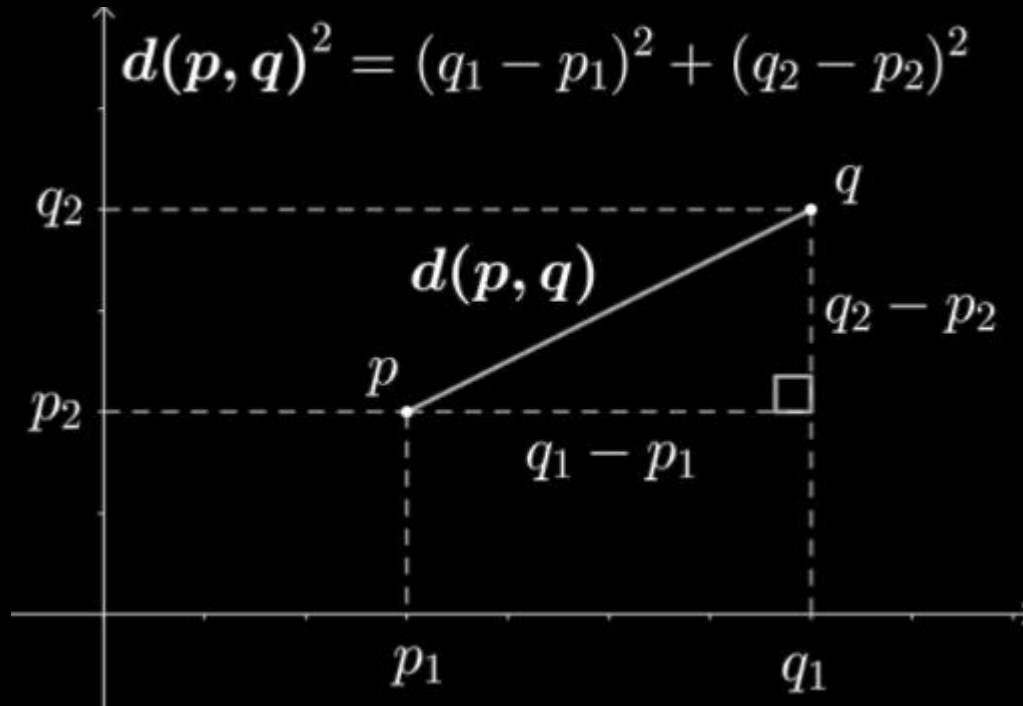
2-dimensionaler Raum: Abstand d zum Nullpunkt = Norm:

$$d(0, P(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|P(x, y)\|$$

3-dimensionaler Raum: $d(0, P(x, y, z)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|P(x, y, z)\|$

(*) griech. *metron* = Maß, Länge

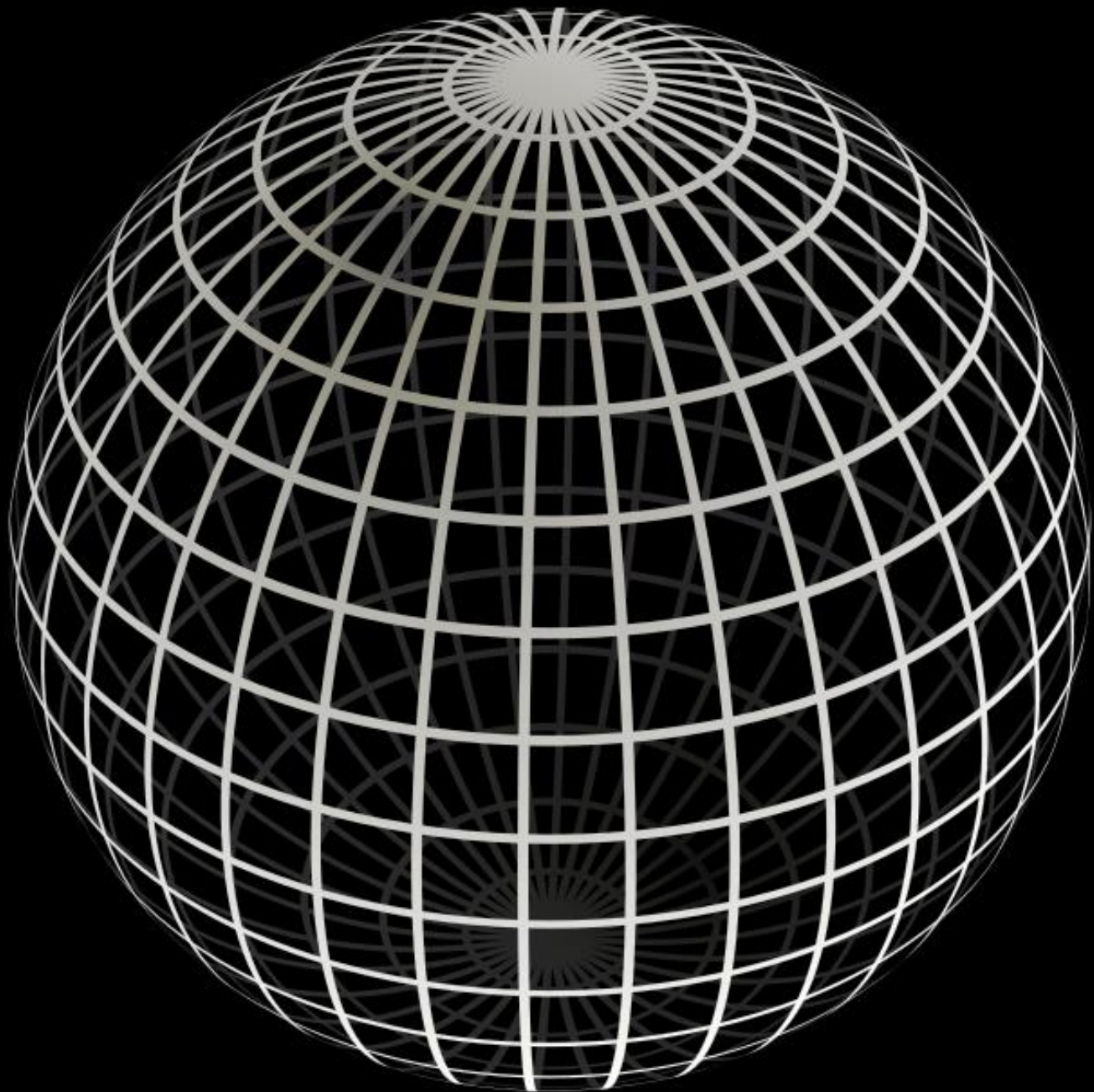
Der Abstand zwischen zwei Punkten = Metrik



Beispiel: $n=2$

$$d(p(x_p, y_p), q(x_q, y_q)) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} = \|p, q\|$$

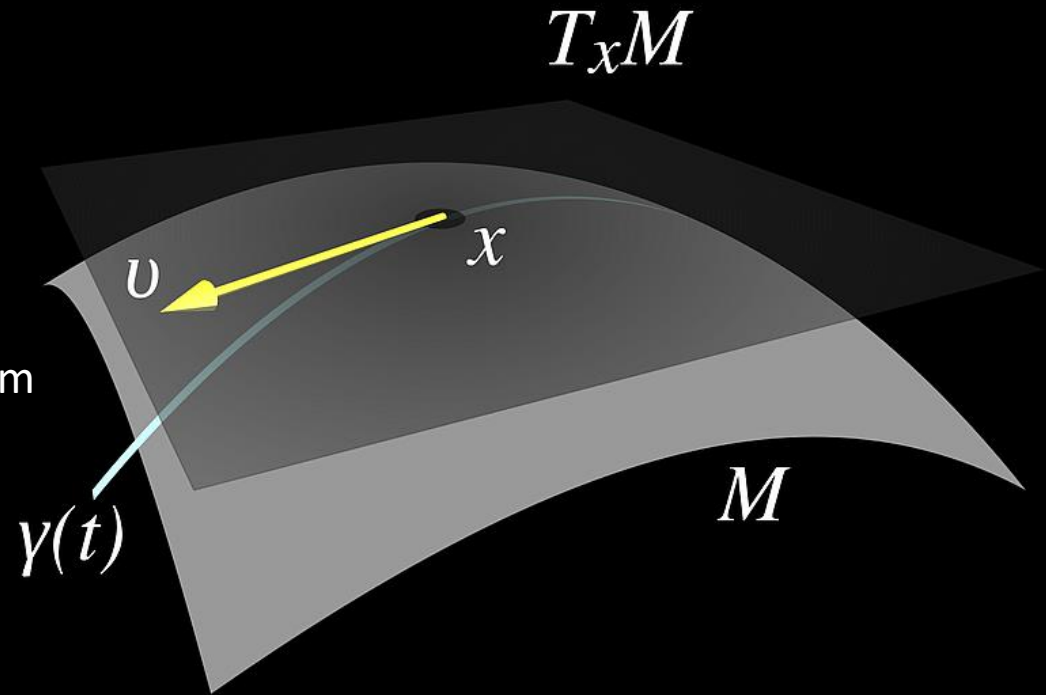
„Euklidische Metrik“



Die „Euklidische Metrik“ ist nur in Euklidischen Räumen gültig, d. h. in n-dimensionalen Räumen, in denen das Euklidische Axiomensystem gilt (z. B. \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3).

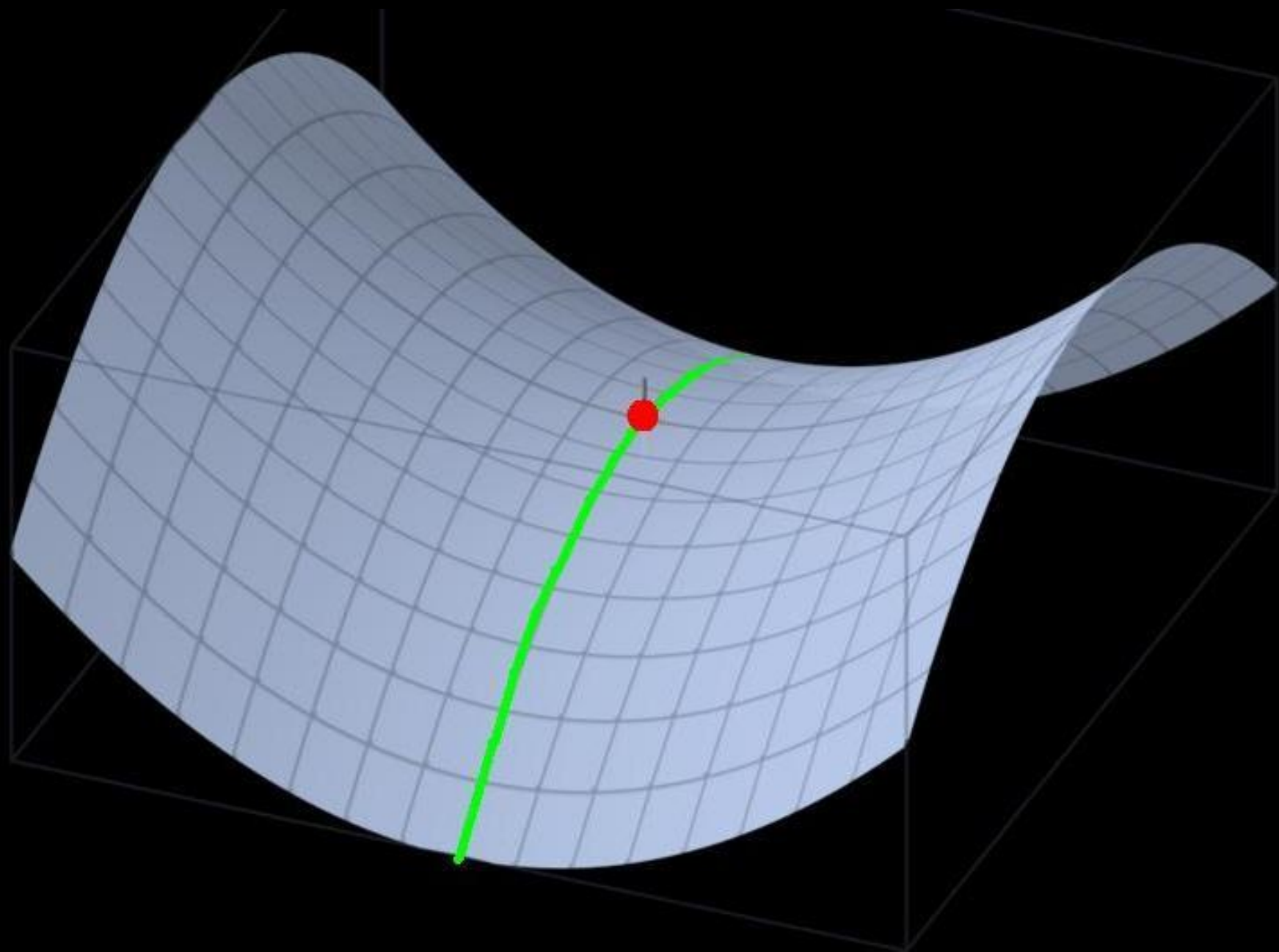
Tangentialraum

Man kann lokal zu einem Punkt x einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit einen Tangentialraum konstruieren, der eine Euklidische Metrik aufweist.



In „gekrümmten Räumen“ muss die Abstandsfunktion $d(p,q)$ modifiziert werden.

→ Stichwort: Metrischer Tensor

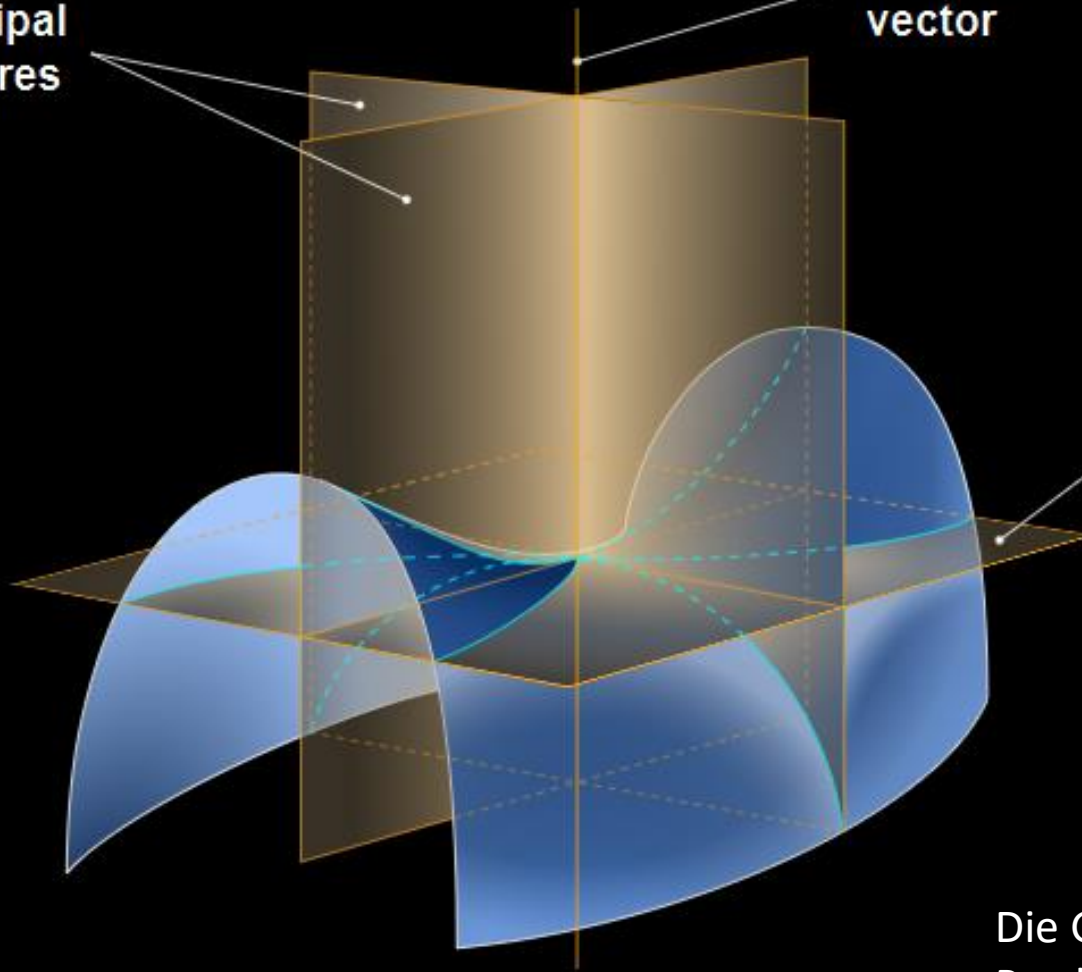


Gaußsche Krümmung

planes
of principal
curvatures

normal
vector

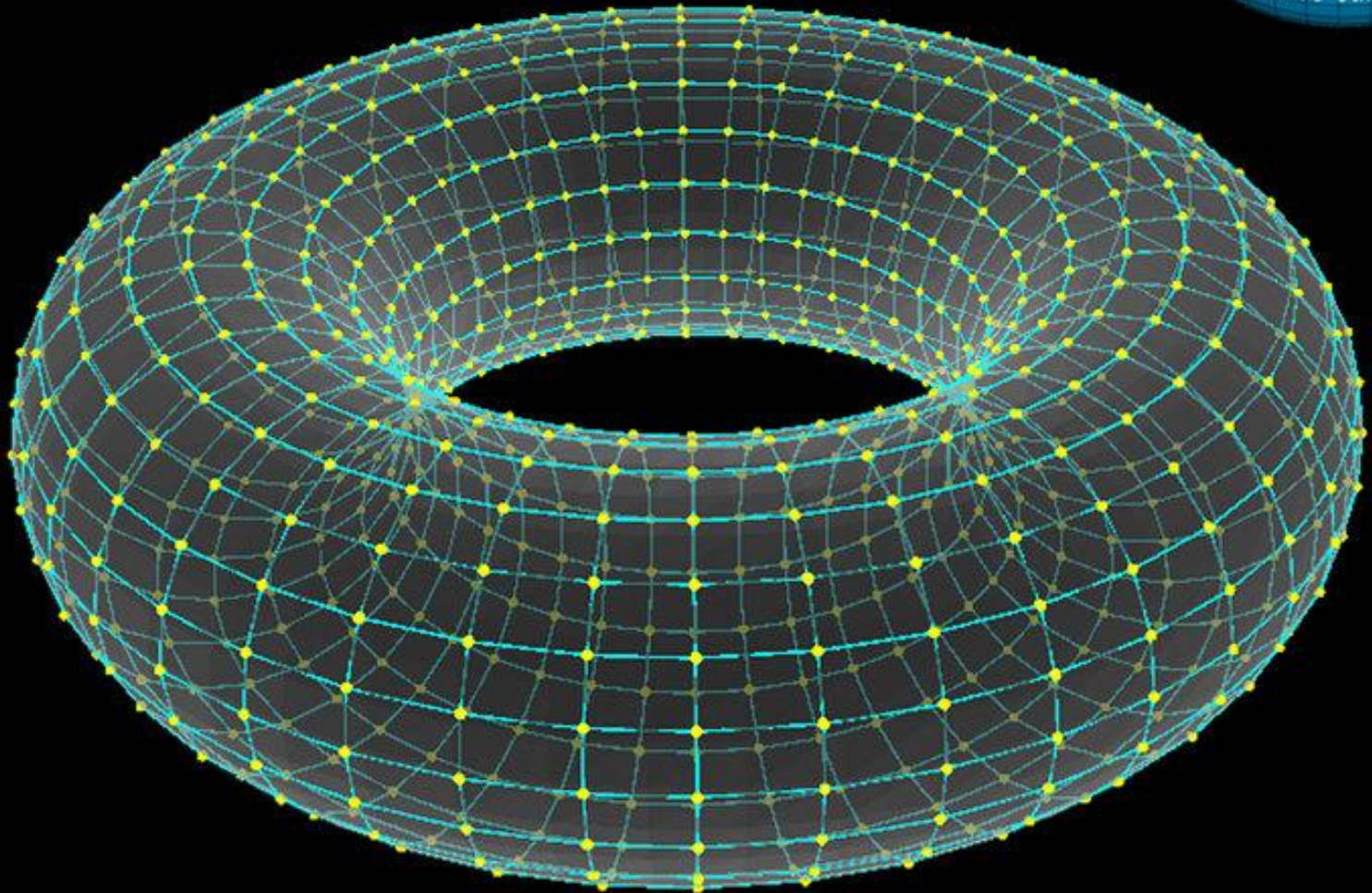
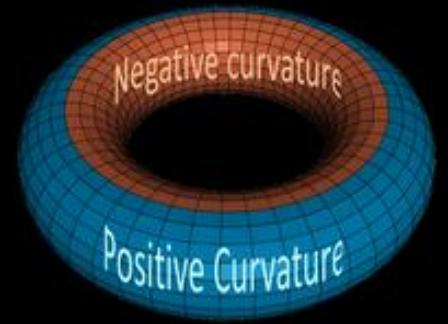
tangent
plane



2 Normalebene

Die Gaußsche Krümmung ist das
Produkt der beiden Haupt-
krümmungen am Punkt P

Gaußsche Krümmung Torus



Ist die Gaußsche Krümmung überall gleich Null:

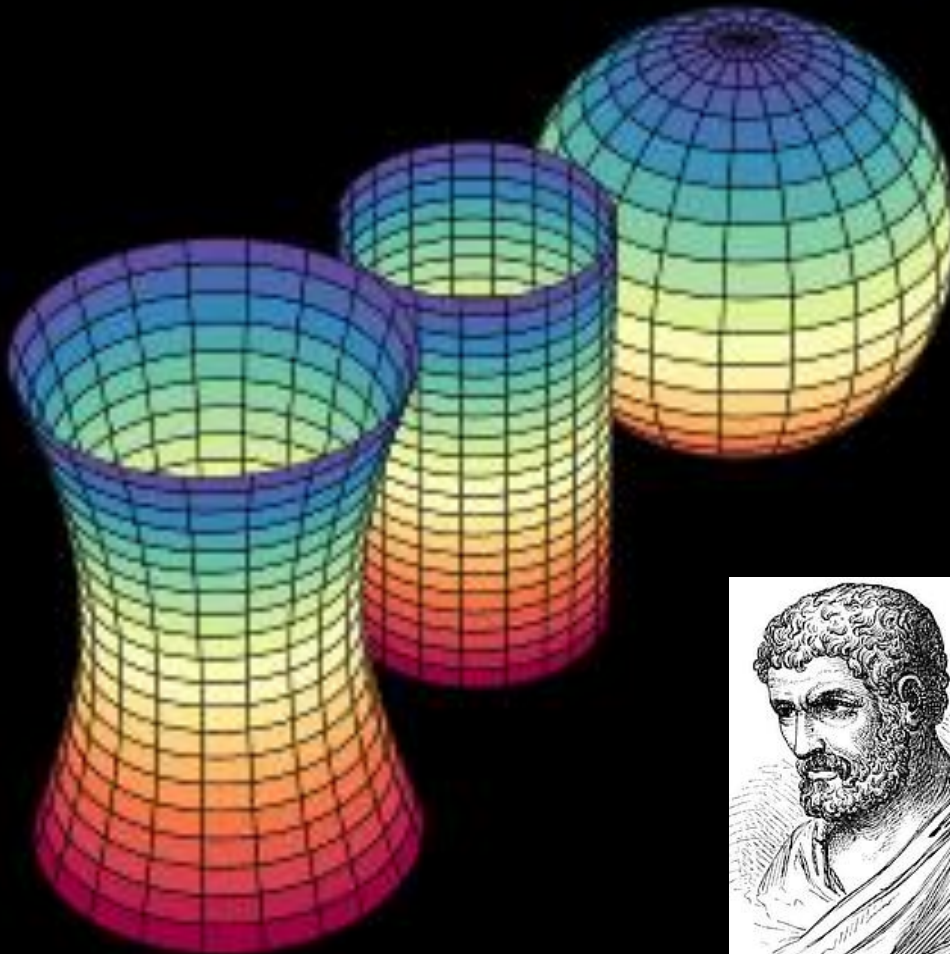
Ist die Gaußsche Krümmung überall positiv:

Ist die Gaußsche Krümmung überall negativ:

Euklidische Geometrie

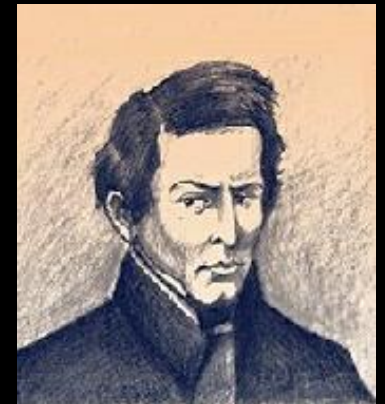
Sphärische oder Riemannsche Geometrie

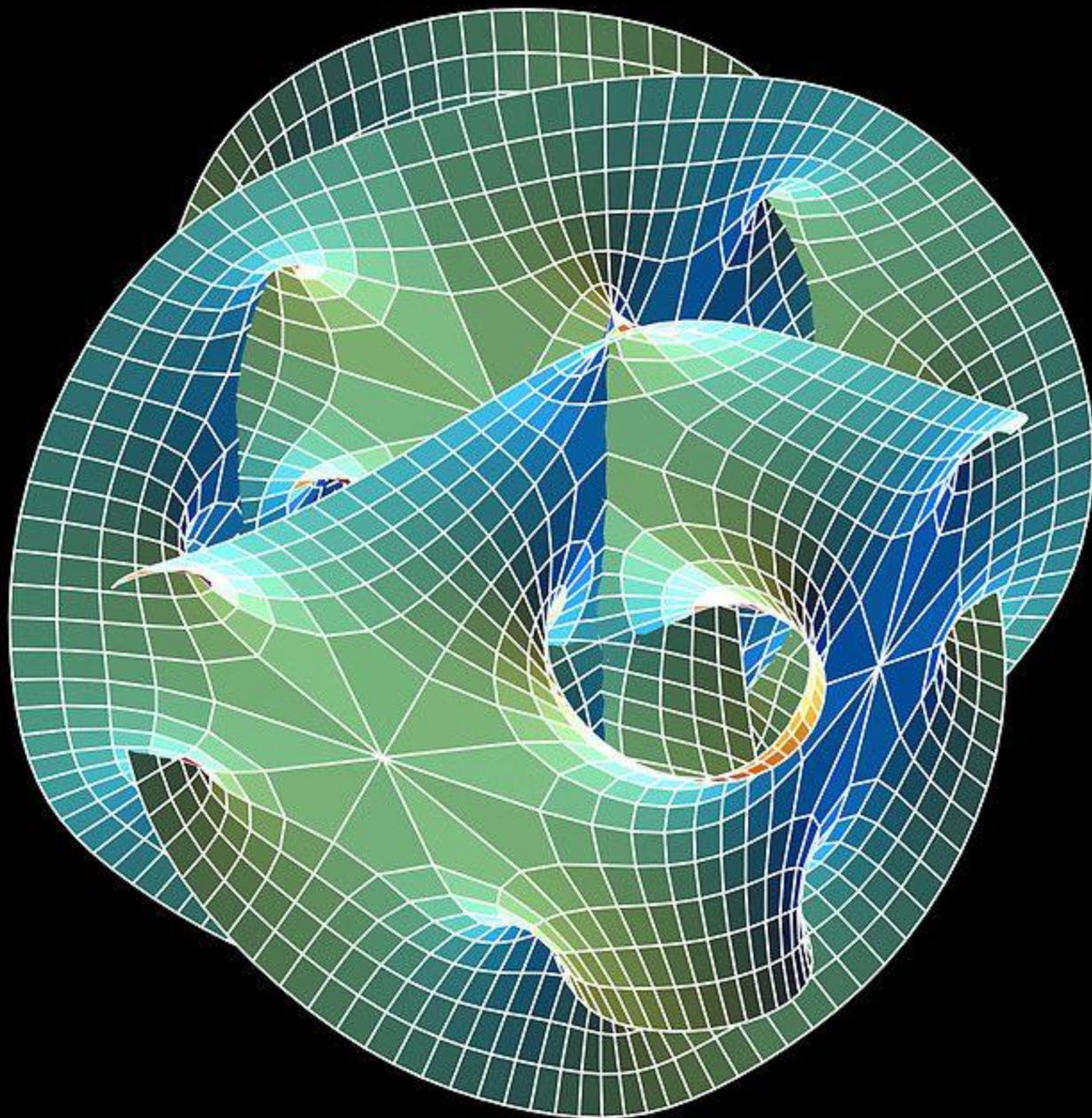
Hyperbolische oder Lobatschewskische Geometrie



Welche Geometrie hat der kosmische Raum (Universum)?

→ ist eine physikalische Frage!





Isaak Newton (1687):

Raum und Zeit existieren unabhängig voneinander. Der Raum stellt dabei das „Behältnis“ dar, in dem das Weltgeschehen stattfindet und die Zeit ist dessen Ordnungsfaktor.

1. Der **absolute Raum** ist das postulierte Konzept eines physikalischen Raumes, der sowohl vom Beobachter als auch von den darin enthaltenen Objekten und den darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängig ist.
2. Die **absolute**, wahre und mathematische **Zeit** verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand. Sie wird mit dem Namen „**Dauer**“ belegt...
3. Ein Körper, auf dem keine **Kräfte** wirken, bewegt sich in einem **Inertialsystem geradlinig gleichförmig**
4. Die **Abweichung der Bewegung eines Körpers von geradlinig gleichförmiger Bewegung** ist proportional (in einem Inertialsystem) einer auf dem Körper wirkenden **Kraft**
5. Actio = Reactio: Die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern erfolgt durch **gegengleiche Kräfte**

Newton'sche absolute Raum und Zeit

Mathematisches Modell

- a) Raum: 3 Bewegungsfreiheitsgrade, 3 Rotationsfreiheitsgrade, Kontinuum, in alle Richtungen unendlich ausgedehnt, euklidische Metrik, völlig unabhängig von dem physikalischen Geschehen in ihm (d. h. er ist nichts anderes als eine Art „Behältnis“)

- b) Zeit: Die Zeit ist unendlich ausgedehnt und nur von einer Dimension. Kontinuum, Damit sind Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eindeutig festgelegt. Alle Zeitpunkte sind aus physikalischer Sicht gleichberechtigt, d. h. der „Zeitpfeil“ existiert in der klassische Mechanik nicht (jeder mechanische Vorgang in der Zeit ist auch in der Zeit umkehrbar).

Zwischen absoluten Raum und absoluter Zeit gibt es keinen Zusammenhang. Sie „existieren“ quasi unabhängig voneinander.

Anmerkungen zum Newtonschen Axiomensystem

Das erste Newtonsche Axiom scheint ein Spezialfall des zweiten Axioms zu sein, nämlich der Fall, wo keine Kraft wirkt: Beschleunigung 0 → Bewegung geradlinig gleichförmig

→ aber das ist nicht die Intention des ersten Axioms. Es definiert vielmehr, was **geradlinig und gleichförmig** bedeutet. Eine Bewegung ohne Krafteinwirkung identifiziert „Geraden“ als Bahnkurven.

(Puck auf Eiskugel, Sand im Kosmos - Trajektorie)

→ **Problem:** Aufgrund der Omnipräsenz der Gravitation gibt es prinzipiell keine Bewegungen ohne Krafteinwirkung

(nur zwei Körper im Kosmos)

→ **Lösung des Problems:** Man betrachte die Gravitation NICHT als Kraft, sondern als „Krümmung“ der **Newtonschen RaumZeit**

→ „geradlinig gleichförmig“ im Raum wird zu „geradlinig“ in der RaumZeit

Die Rolle einer Theorie in der „Welterklärung“

Eine Theorie ist im Allgemeinen eine durch Denken gewonnene Erkenntnis im Gegensatz zum durch Erfahrung gewonnenen Wissen.

In der Wissenschaft bezeichnet Theorie abweichend ein System wissenschaftlich begründeter Aussagen, das dazu dient, Ausschnitte der Realität und die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu erklären und Prognosen über die Zukunft zu erstellen.

Eine Theorie liefert Begriffe sowie den Bezugsrahmen, in dem man Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt einordnet und dessen Beziehungen untereinander sichtbar macht. Die Qualität einer Theorie wird daran gemessen, wie exakt sie Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt zu widerspiegeln vermag sowie in ihrer Vorhersagekraft in Bezug auf noch unbekannte Objekte und Prozesse (die dann wirklich empirisch in Experimenten nachgewiesen werden oder nicht).

Da die Alltagssprache zu unpräzise für derartige Aufgaben ist, nutzt man die Mathematik, um physikalische Objekte und Prozesse zu beschreiben.

Eine physikalische Theorie bedient sich mathematischer Modelle, um die Komplexität der realen Welt begrifflich handhabbar zu machen:

Was ist ein „Modell“ ?

- Im Prinzip ist jede individuelle oder gesellschaftlich Wahrnehmung eine Theorie der Realität
- Religionen sind auch Modelle der Welt (= "Kosmologien")
- Wissenschaftliche Modelle kontrollieren ihre Gültigkeit scharf an der Realität (Experimente)
- **Mindestanforderung an ein Modell: Ein Modell muss die Realität quantitativ und qualitativ mit mindestens ausreichender Genauigkeit abbilden und eine annehmbare Prediktionsfähigkeit in der Zukunft haben**
- **Maximalforderung:** In der Theoretischen Physik wird sogar eine quantitative und qualitative Identität zwischen Modell und Realität gefordert.

In der physikalischen Theoriebildung wird stillschweigend davon ausgegangen, dass sich die „Realität“, wie sie sich der empirischen Forschung offenbart, von mathematischer Struktur ist und sich deshalb mit mathematischen Objekten abbilden lässt.



Realität

"Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen."

Mathematik

"In dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten."

"Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen."

Mathematischer Raumbegriff – Physikalischer Raum

Mathematische Räume sind abstrakte Räume (d. h. Mengen mathematischer Objekte mit einer Struktur), die eine Topologie und eine metrische Struktur aufweisen.

Beispiele: Topologische Räume, metrische Räume, Vektorräume, spezielle Funktionenräume etc. pp.

Der **Perzeptible oder Wahrnehmungsraum** ist der den Sinnen zugängliche Erfahrungsraum, der quasi als „Behältnis“ wahrgenommen wird. Er ist dreidimensional und euklidisch.

Der **physikalische Ortsraum** stellt ein eindeutiges Bezugskonstrukt dar, dessen Topologie und Geometrie durch die Erfahrung zu ermitteln ist. In der modernen Physik bildet er zusammen mit der Zeit die sogenannte „**Raumzeit**“. Ihre globale topologische und metrische Struktur ist noch weitgehend unbekannt. Lokal ist sie jedoch quasi-euklidisch und mit dem Wahrnehmungsraum identisch.

Der **objektive Raum** ist der Raum, in dem die „Realität“ unabhängig von einem Beobachter stattfindet.

Mathematischer Raum

Perzeptibler Raum (Wahrnehmungsraum)

Konzeptioneller Raum (physikalischer Raum)

Objektiver Raum (real)



\mathbb{R}^3

Mathematisches Modell:

Kontinuierliche Punktmenge mit aufgeprägter topologischer Struktur und Metrik

Zusammenfassung „Raum“

- Ein Raum ist eine Mannigfaltigkeit von diskreten oder kontinuierlichen Raumpunkten
- Ein „Raum“ wird erst „messbar“ (d.h. Raumpunkte identifizierbar), wenn in ihm eine Metrik (in Form eines invarianten Abstandes ds) definiert ist
- Die Metrik bestimmt die „Geometrie“ des Raumes, d.h. z.B. welches lokales oder globales Krümmungsmaß er besitzt
- Die Anzahl der voneinander unabhängigen „Richtungen“ im Raum nennt man seine Dimensionen (= Anzahl der Koordinatenachsen)
- Mathematische Räume können eine beliebige Dimension n besitzen
- Dimensionen können „verborgen“ sein (Kaluza-Klein-Räume)
- Die Zusammenhangsverhältnisse und das Verhalten von Räumen unter stetigen Transformationen wird durch die Topologie untersucht

Newtonsche Physik:

Raum und Zeit werden als **absolute Bezugssysteme** gedacht. Ihre „Existenz“ erlaubt die Definition einer Dynamik.

Newtonsche Kosmologie

Prämissen

Raum und Zeit sind keine inhärenten Bestandteile der Newtonschen Physik. Sie sind a-priori gegeben und fungieren als „Behältnis“ und Parameter zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen. Sie sind auch keine Bestandteile der axiomatischen Begründung der Newtonschen Mechanik. Ihre Existenz ergibt sich als Denknöwendigkeit (Kant):

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.

Die absolute, wahre oder mathematische Zeit verfließt an sich und nach ihrer Natur ohne Beziehung auf irgend ein äußeres Ding gleichmäßig.

Eigenschaften des absoluten Raums:

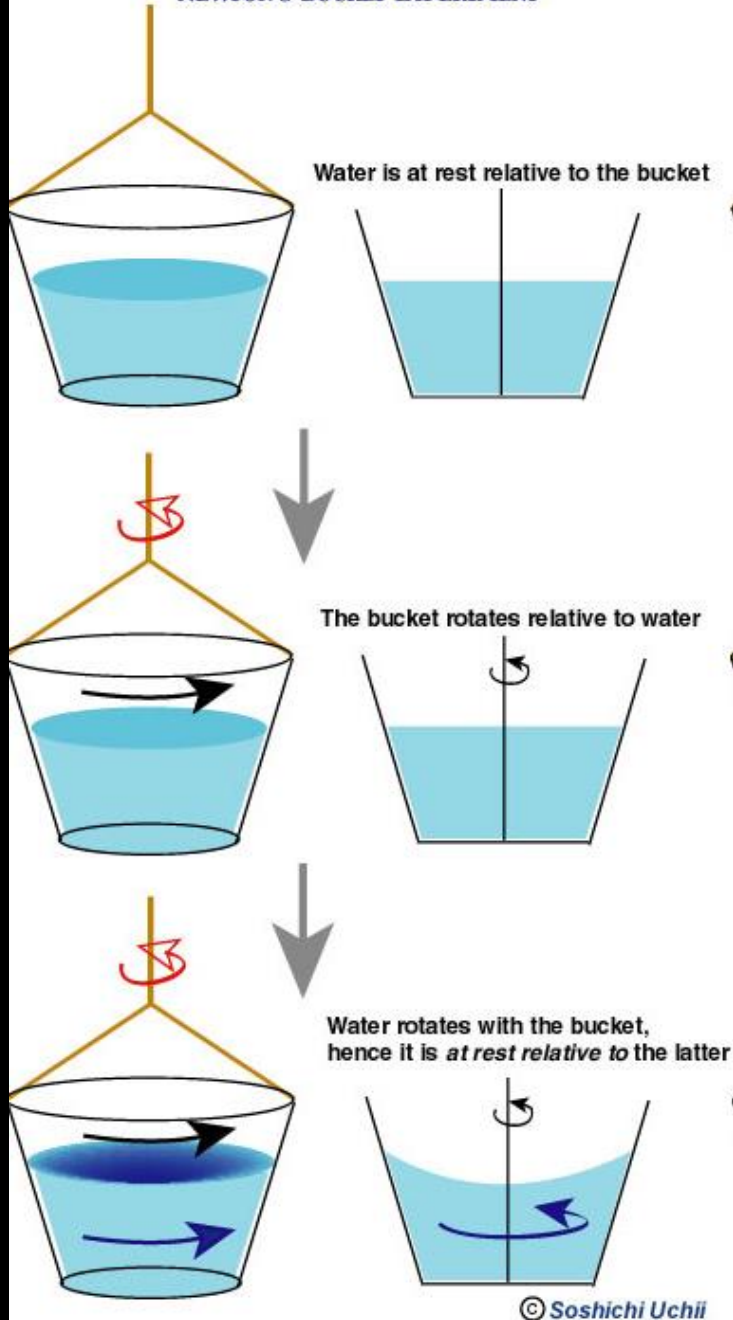
- er existiert unabhängig von den materiellen Körpern der Welt
- er definiert ein absolut ruhendes Koordinatensystem mit euklidischer Metrik und drei Dimensionen
- alle Bezugssysteme, die sich gleichförmig in Bezug auf den absoluten Raum bewegen, sind kräftefrei (Galileisches Relativitätsprinzip)
- Beschleunigungen erfolgen relativ zum absoluten Raum → Trägheitskräfte

Problem: (Ernst Mach, 1838-1916)

Sind „Raumpunkte“ ohne materielle Körper, die ein Koordinatensystem aufspannen, identifizierbar? (diese Frage wurde bereits von Leibnitz erörtert)

Wenn nein, wie kann dann eine Beschleunigung gegenüber dem „absoluten Raum“ Trägheitskräfte hervorrufen?

NEWTON'S BUCKET EXPERIMENT



Newton's Eimerexperiment

- Beweis für den absoluten Raum (?)
- E. Mach: „Beschleunigung gegenüber dem Sternhimmel“

- Keine Materie als Bezugspunkte
- Keine Beschleunigung
- keine Trägheitskräfte ...

Das „Eimerproblem“ ist bis heute noch nicht gelöst und Gegenstand weltweiter Forschung

→ Machsches Prinzip

Kritik des absoluten Raumes: Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716)

Existiert der absolute Raum als Entität, d.h. als „Hintergrundsubstanz“ oder spannen erst die Relationen zwischen materiellen Körpern den „Raum“ auf?

Fragen über Fragen ...

- Wo im „Raum“ befindet sich das Universum?
- Würde man es merken, wenn man das Universum z.B. 3 Meter nach Rechts im Raum verschiebt?
- Wenn man grundsätzlich nicht im Stande ist, den „Raum“ oder Veränderungen im „Raum“ zu entdecken, warum sollte man ihm „Existenz“ zubilligen?
- Verschwindet der absolute Raum, wenn alle materiellen Objekte aus ihm entfernt werden?

Newton: Der absolute Raum hat Konsequenzen

-> er erlaubt, **Bewegungsänderungen** relativ zu ihm zu messen

Frage: Gibt es Alternativen zu dieser Auffassung?

1. Newton betrachtet nur die relative Bewegung des Wassers in Bezug auf den Eimer

→ Relativgeschwindigkeit = 0

→ Oberfläche konkav

→ Rotation gegenüber dem absoluten Raum

2. Wieso liefert der absolute Raum nur einen Bezugspunkt gegenüber Beschleunigungen, jedoch nicht für gleichförmige Bewegungen?

Ernst Mach: Es gibt neben dem hypothetischen absoluten Raum auch noch natürliche Bezugspunkte, anhand der sich die Bewegung des Wassers im Eimer definieren lässt

→ der kosmische Raum mit all seinen Sternen und Galaxien

Mach'sche Hypothese:

Wenn alle Himmelskörper aus dem kosmischen Raum entfernt werden, gibt es keine z.B. durch Rotation hervorgerufenen Beschleunigungen mehr.

→ die träge Masse verschwindet

Machsches Prinzip:

Die träge Masse eines Körpers entsteht durch die Wechselwirkung dieses Körpers mit allen anderen Körpern im Weltall.

Beobachtung:

Schwere Masse und träge Masse sind streng proportional zueinander

→ alle Körper fallen gleich schnell im Schwerfeld



Albert Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie

Newton'sche Kosmologie vor 1905 ...

Die „Kosmologie“ war im Abendland maßgeblich theologisch geprägt. In der Vulgärtheologie war die Dreiteilung „Hölle“, „Erde“ und „Himmel“ die Grundlage der Weltsicht der abrahamitischen Religionen. Dante's *„La divina commedia“* von 1320 war eine gute Zusammenfassung dieser Weltsicht.

Mit der Entwicklung der modernen Naturwissenschaften (Descartes, Galilei, Newton etc.) begann man ein von Religionen unabhängiges Weltbild anhand allgemeiner philosophischer Prinzipien und von Beobachtungen zu entwickeln.

Zitat Pierre Simon de Laplace: *„Traité de Mécanique Céleste“*

Napoleon: *„Wo ist denn Gott in Ihrem Weltbild?“*

Laplace: *„Diese Hypothese, Sire, benötige ich nicht.“*

Die Astronomie im 17. und 18. Jahrhundert war im Grunde eine Astronomie des Sonnensystems. Die Vermessung des Sternhimmels diente im Wesentlichen dazu, Positionsbestimmungen von Planeten, Kometen und Planetoiden mit hoher Genauigkeit zu ermöglichen, um deren Bahnen berechnen zu können.

Grundlagen und Prämissen einer Kosmologie, die auf der Grundlage der Newtonschen Mechanik beruht

Modellannahmen:

Früher: absoluter Raum

Heute: topologischer Raum + Metrik

Früher: absolute Zeit

Heute: metrische Zeit (ohne Zeitpfeil)

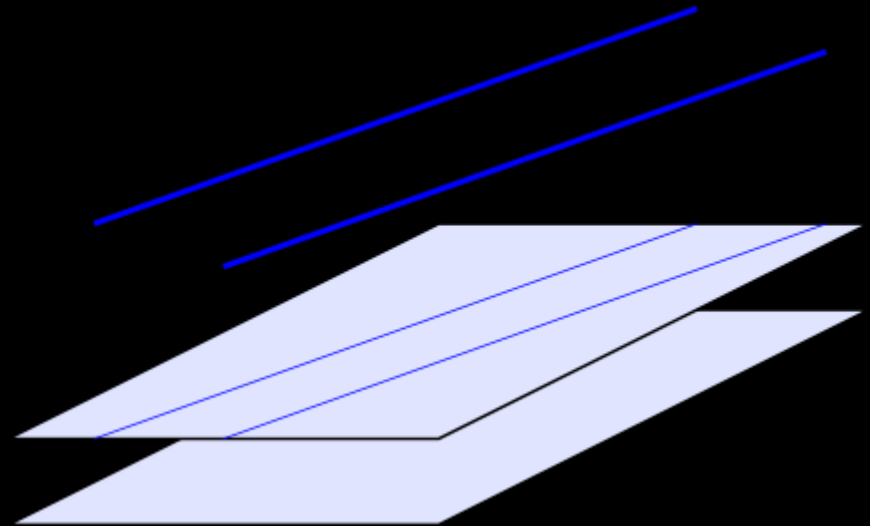
Die Newtonsche Mechanik lässt sich modern so darstellen, dass man sie auf der Grundlage verschiedener Topologien und darauf definierter Metriken formulieren kann. Die jeweiligen Vorhersagen lassen sich dann empirisch mit astronomischen Beobachtungen vergleichen und damit falsifizieren.

1. Topologien, die mit einer euklidischen Metrik vereinbar sind:

Beispiel im \mathbb{R}^2 :

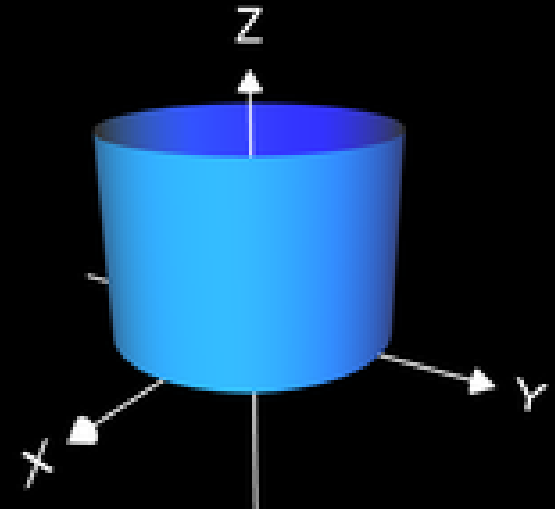
in x und y unendlich ausgedehnte Ebene, in der das Euklidische Parallelenaxiom gilt.

homogen + isotrop



Fläche eines in eine Richtung unendlich ausgedehnten Zylinders.

homogen



Da der physikalische Raum dreidimensional ist, müssen in der theoretischen Beschreibung natürlich die dreidimensionalen Analoga von „unendlich ausgedehnter Ebene“ oder „unendlich ausgedehnter Zylinder“ zum Einsatz kommen. Beide weisen eine euklidische Metrik auf.

Der Euklidische Raum als Modell des „Kosmischen Raumes“

1. Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen.
2. Man kann eine Strecke kontinuierlich zu einem Strahl verlängern.
3. Um jeden Punkt kann man einen Kreis mit beliebigem Radius zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. (Parallelenaxiom): Wenn eine Strecke zwei andere Strecken derart schneidet, so dass die beiden inneren Schnittwinkel auf der einen Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, dann schneiden sich die beiden Strecken, wenn sie weit genug verlängert werden, auf der Seite, auf der die Schnittwinkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

Grundannahme:

Der kosmische Raum stellt eine dreidimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit dar, die in alle Raumrichtungen unendlich weit ausgedehnt sowie homogen und isotrop ist .

Kosmologisches Prinzip

- Das Weltall ist **homogen** – d. h., es stellt sich einem Beobachter unabhängig von seinem Standpunkt im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Homogenität**, auch “Kopernikanisches Prinzip“ genannt).
- Das Weltall ist **isotrop** – d. h., es stellt sich dem Beobachter unabhängig von der Beobachtungsrichtung im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Isotropie**).

Das Prinzip der Homogenität impliziert, dass die Sterne (heute würde man sagen, Galaxien) gleichmäßig, d. h. überall mit der gleichen räumlichen Dichte, im unendlichen Universum verteilt sind.

Symmetrieprinzipien und mechanische Erhaltungssätze

Homogenität des Raumes impliziert Impulserhaltung

Isotropie des Raumes impliziert Drehimpulserhaltung

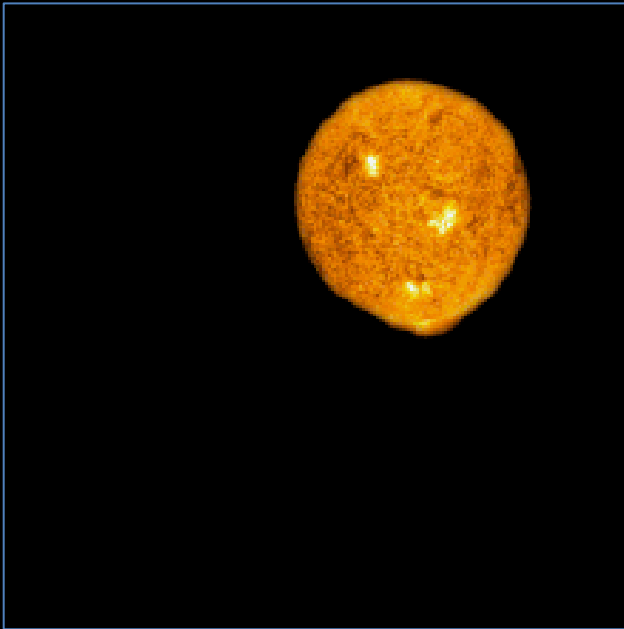
Homogenität der Zeit impliziert Energieerhaltung

Noether-Theorem

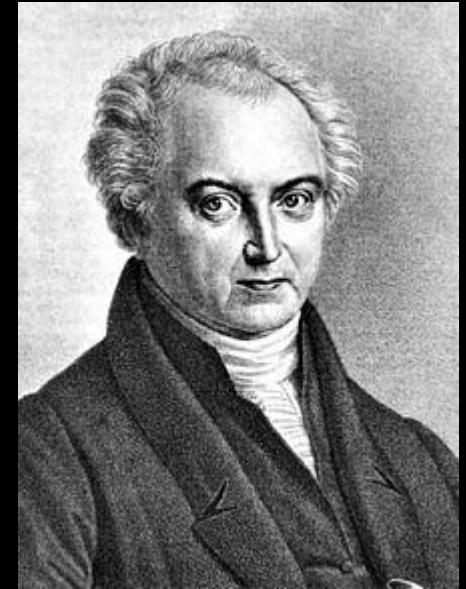
„Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander, oder in Milchstrassen-Systeme vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und da müsste der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden.“

Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758 -1840)

Olberssches Paradoxon



- Sterne haben eine endliche Ausdehnung und Leuchtkraft
- Anzahl der Sterne nimmt mit R^3 zu
- Statisches Universum



Das Olberssche Paradoxon ist ein ernstzunehmender Test für kosmologische Theorien

Stabilität eines unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universums

Hugo von Seeliger (1849-1924)

Aufgrund der gravitativen Anziehung führt jede zufällig erfolgte Massenkonzentration zu einem Gravitationskollaps. Ein unendlich ausgedehntes und homogen mit Sternen erfülltes Universum ist per se instabil.



Lösung: Man muss die Materie im Kosmos hierarchisch verteilen

Hierarchisches Weltmodell von Carl Charlier (1908 und 1922)

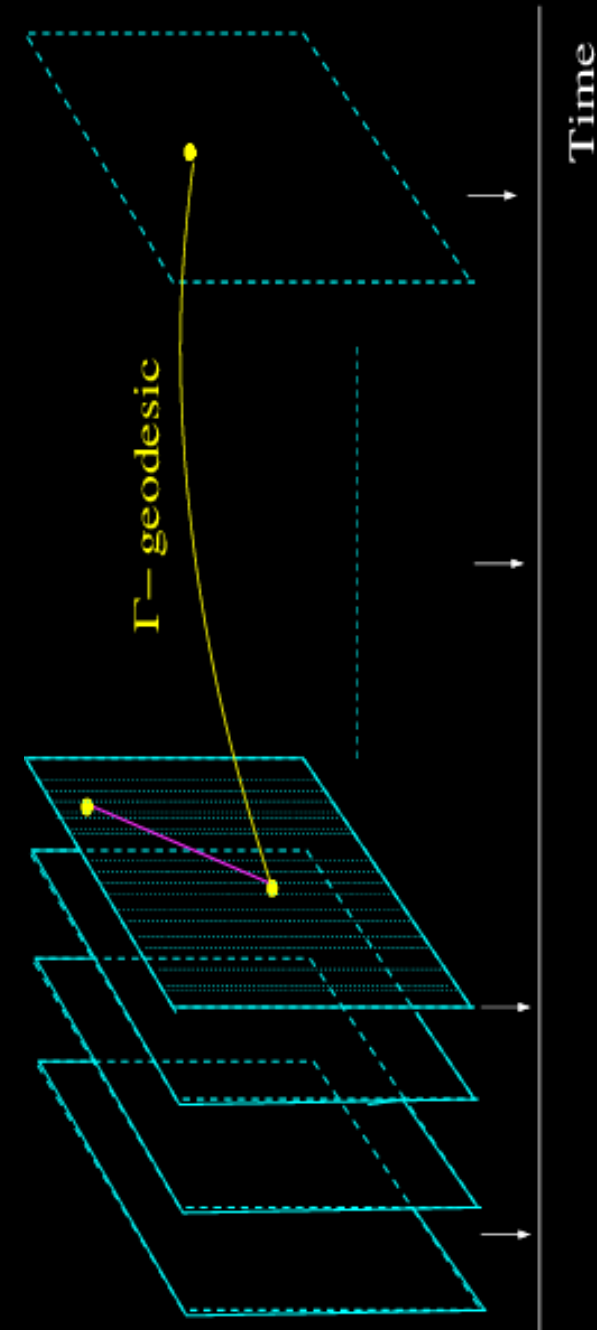
Fraktales Weltmodell nach Benoit Mandelbrot (1977)

Die Newtonsche Mechanik ist eine deterministische Theorie

Da die Bewegungsgleichungen deterministisch und reversibel sind, ist jedes Ereignis in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft vorbestimmt:

„Laplace'scher Dämon“

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.“



Newtonsches Blockuniversum

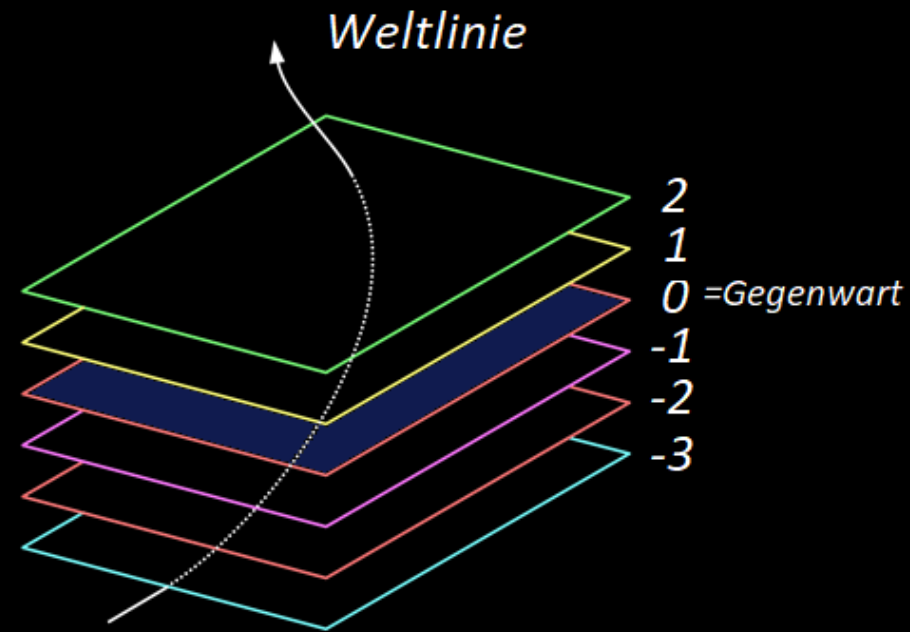
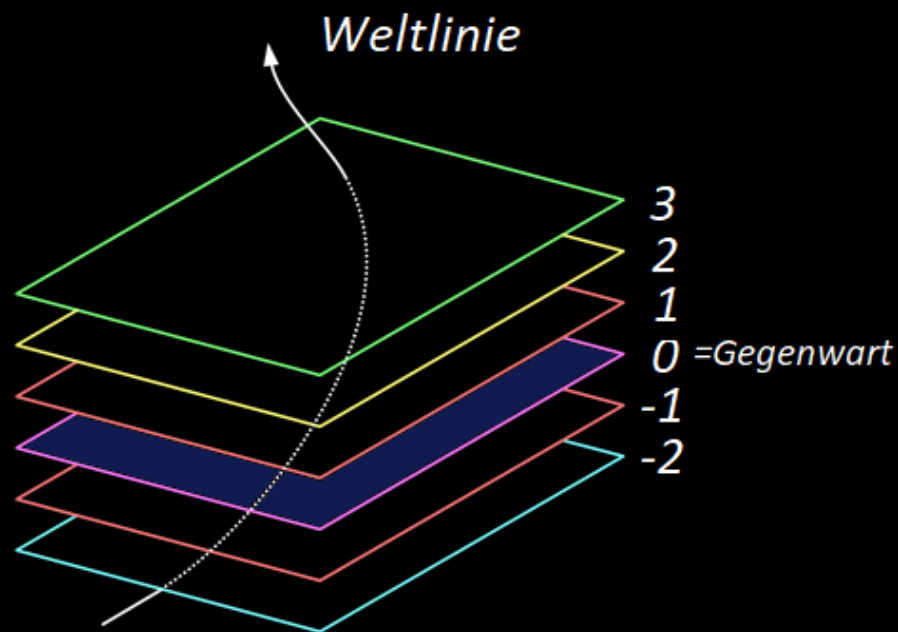
Man kann sich das Newton'sche Universum als eine Art „Daumenkino“ vorstellen, bei der jede Karte einen Augenblickszustand der Welt darstellt. Dabei ist der „Augenblick“ „Gegenwart“ derart ausgezeichnet, dass alle Karten (= „Zeitschnitte“) darunter die „Vergangenheit“ und alle Karten darüber die „Zukunft“ darstellt. Dabei „bewegt“ sich der Augenblick „Gegenwart“ gleichmäßig Zeitschnitt um Zeitschnitt in Richtung Zukunft.



Im Newtonschen Blockuniversum ist die Zukunft vollständig determiniert (Stichwort: Laplacescher Geist) - d. h. alles, was passiert, ist vorbestimmt

Im Newtonschen Blockuniversum ist eine „Zeit“ auf der Zeitachse ausgezeichnet . Es ist der „Augenblick“. Alle Ereignisse (x,y,t) , die auf der Augenblicks-Zeitscheibe liegen, sind gleichzeitig.

Die „Bewegung“ eines Körpers durch das Blockuniversum ist eine Folge von Ereignissen, die von Zeitscheibe zu Zeitscheibe wandern → Weltlinie

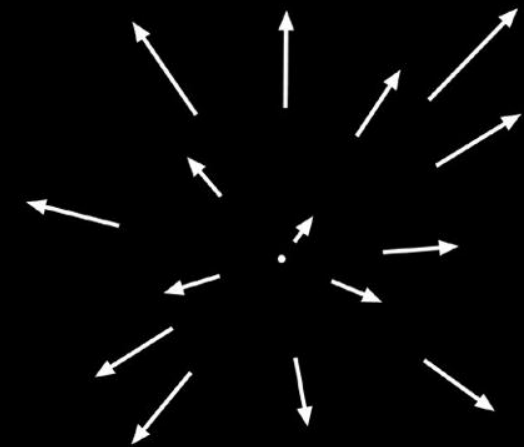
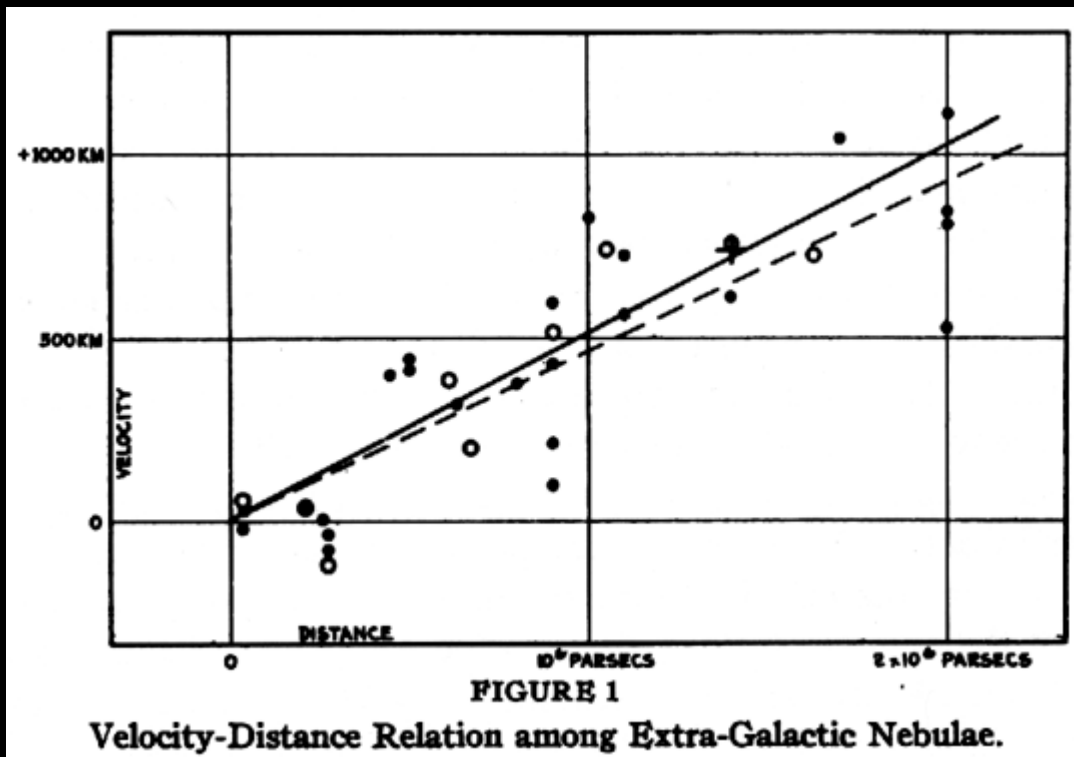


Newtonsches Blockuniversum

- Unendlich ausgedehnter euklidischer Raum mit homogener und isotroper Materieverteilung („Kosmologisches Prinzip“)
- Raum und Zeit werden als kontinuierlich angesehen (es gibt keine kleinste Raum- und Zeitintervalle)
- Weltlinien von gleichmäßig gleichförmig bewegten Körper sind Geraden im Newtonschen Blockuniversum
- Weltlinien von beschleunigt bewegten Körpern sind stetige, gekrümmte Kurven im Newtonschen Blockuniversum
- Jede „gerade“ Weltlinie ist Repräsentant eines Inertialsystems. Sie kennzeichnen kräftefreie Bewegungen. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt und lassen sich über die Galilei-Transformationen ineinander überführen.
- Es gibt in der Newtonschen Physik keine maximale Grenzgeschwindigkeit (instantane Ausbreitung von Signalen)

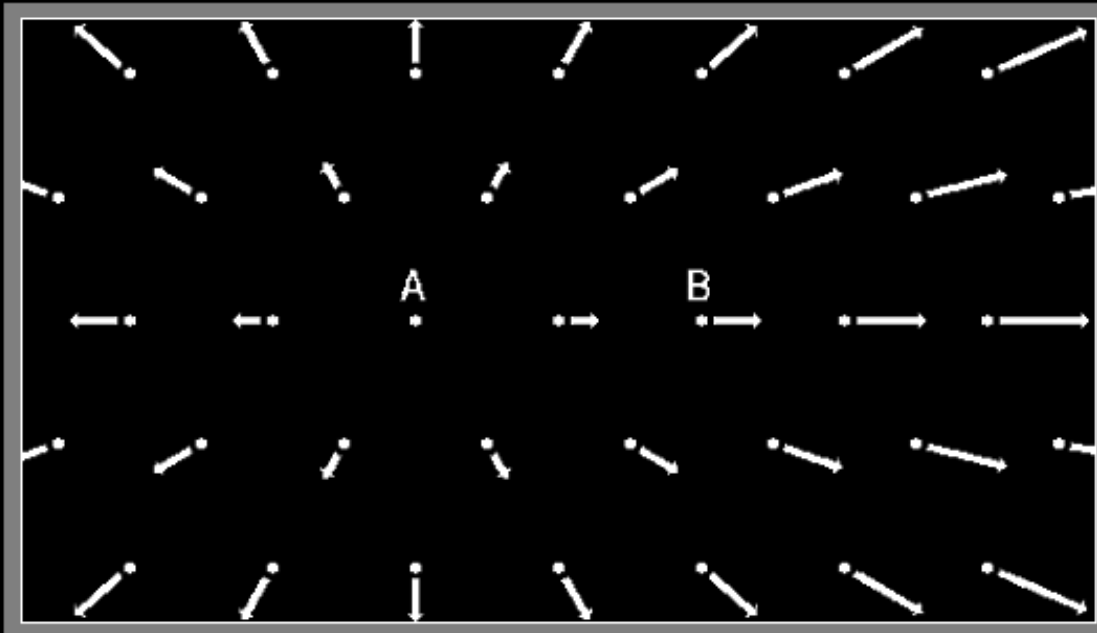
Kosmische Expansion

Um 1915 stellt Vesto Slipher (1875-1969) am Lowell Observatory in Arizona fest, dass bei 11 der von ihm untersuchten 15 Galaxien sogenannte "spektrale Rotverschiebungen" zu verzeichnen waren. 1929 entdeckte dann Edwin Hubble (1889-1953), dass es einen Zusammenhang zwischen der anhand von Cepheiden ermittelten Entfernung von Galaxien und deren Rotverschiebung gibt und zwar in dem Sinn, dass je größer die Rotverschiebung, desto größer die Entfernung der entsprechenden Galaxie.



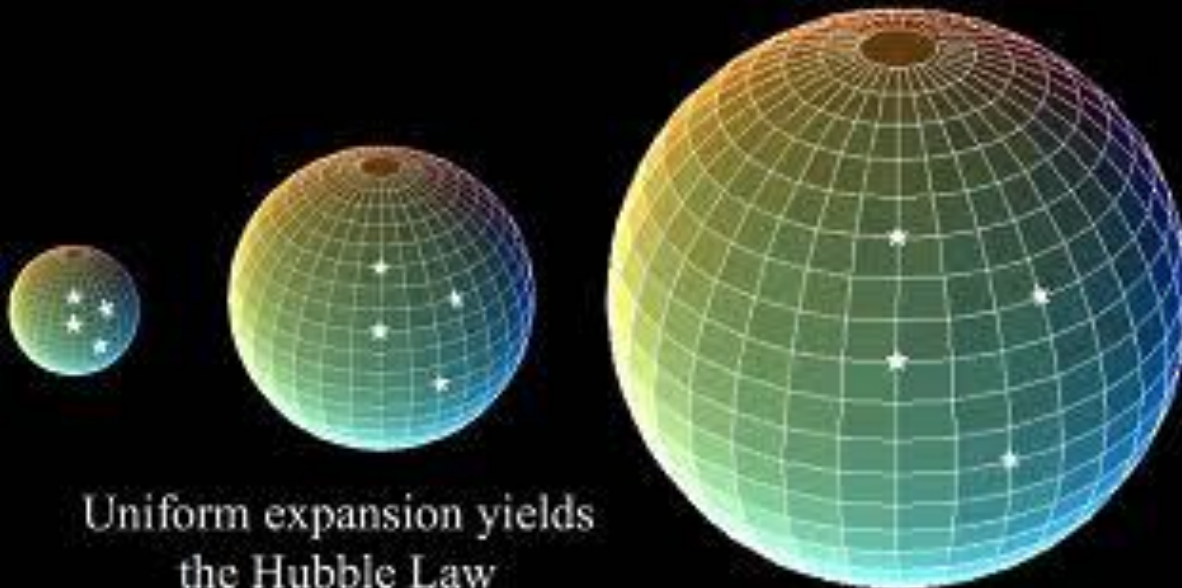
$$V = H_0 d$$

Hubble-Gesetz



Hubble-Fluss

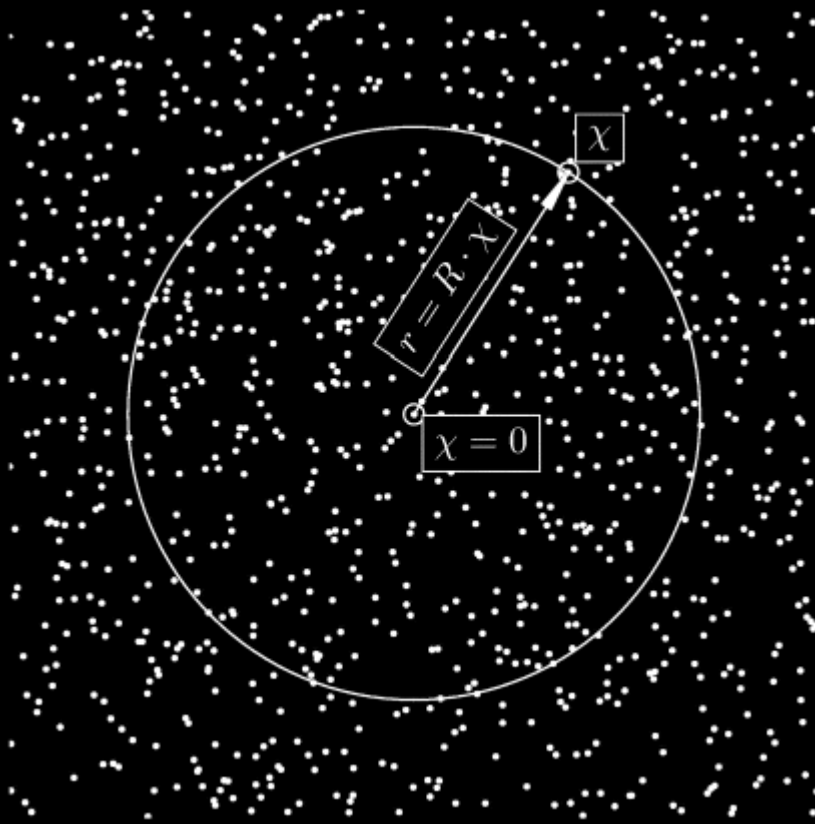
Euklidische Ebene



Kugeloberfläche

Uniform expansion yields
the Hubble Law

Lässt sich die kosmische Expansion im Rahmen der Newtonschen Mechanik beschreiben?



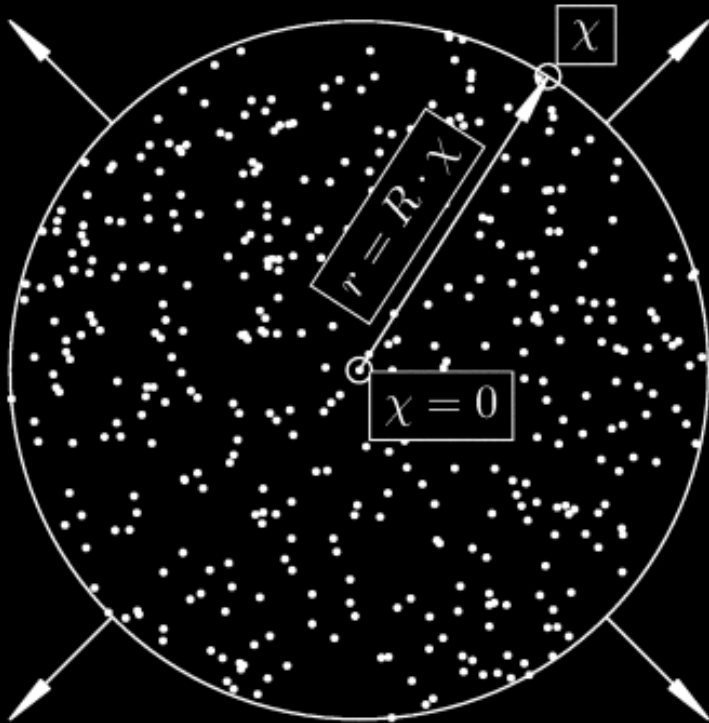
Von einer gedachten Kugel umschlossene Galaxien in einem unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universum



Einführung eines Skalenfaktors $R(t)$, der alle Entfernungen mit der Zeit anwachsen (Expansion) oder abnehmen (Kontraktion) lässt. Ein Skalenfaktor $R(t)=1$ beschreibt ein statisches Universum

2d – Modell (R^2 , unendlich ausgedehnte Ebene)

Die endliche Lichtgeschwindigkeit impliziert (unter der Annahme eines endlichen Weltalters) einen „Horizont“, der den (endlichen) beobachtbaren Teil des Universums vom unendlichen Universum trennt.



Modell:

Man betrachtet ein expandierendes Volumen, welches mit einem „Galaxiengas“ gefüllt ist.

→ vergrößert man das Volumen, dann nimmt die Dichte ab. Da dabei die „innere Energie“ des Galaxiengases in potentielle Gravitationsenergie transformiert wird, bleibt dabei die Gesamtenergie erhalten (adiabatische Expansion).

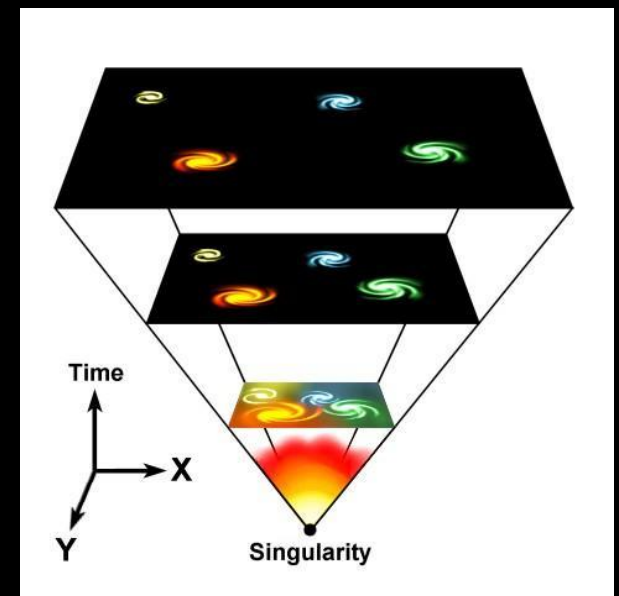
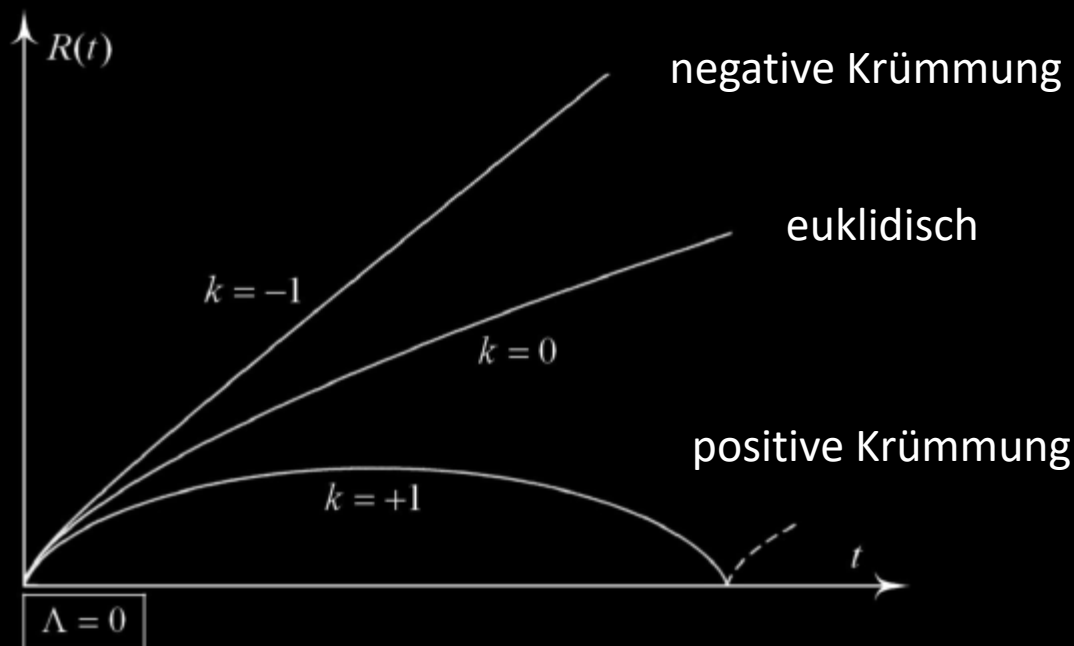
Mathematische Modellierung führt zu den **Friedman-Gleichungen** (Edward Milne, 1934)

Friedmann-Lemaître-Gleichungen

Die **Friedmann-Gleichungen** stellen eine Vereinfachung der einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) unter der Annahme eines homogenen und isotropen Weltalls (Kosmologisches Prinzip) dar. Aus den Gleichungen lassen sich je nach dem Energiegehalt des Universums Voraussagen über seine **zeitliche Entwicklung** herleiten, d. h. die spezielle Form der Expansion oder Kontraktion.



Alexander Alexandrowitsch Friedmann (1888-1925)



Ein paar Konsequenzen eines unendlich ausgedehnten Universums mit endlichen Weltalter

Beobachtbares Universum = **Hubble-Blase** im unendlich ausgedehnten Universum

Radius $\sim 46,6$ Milliarden Lichtjahre bei einem Weltalter von 13,8 Milliarden Jahre

→ jeder Punkt im Universum hat seine eigene (expandierende) Hubble-Blase

→ Beobachter können sich nur dann „sehen“, wenn sich ihre Hubble-Blasen überlappen

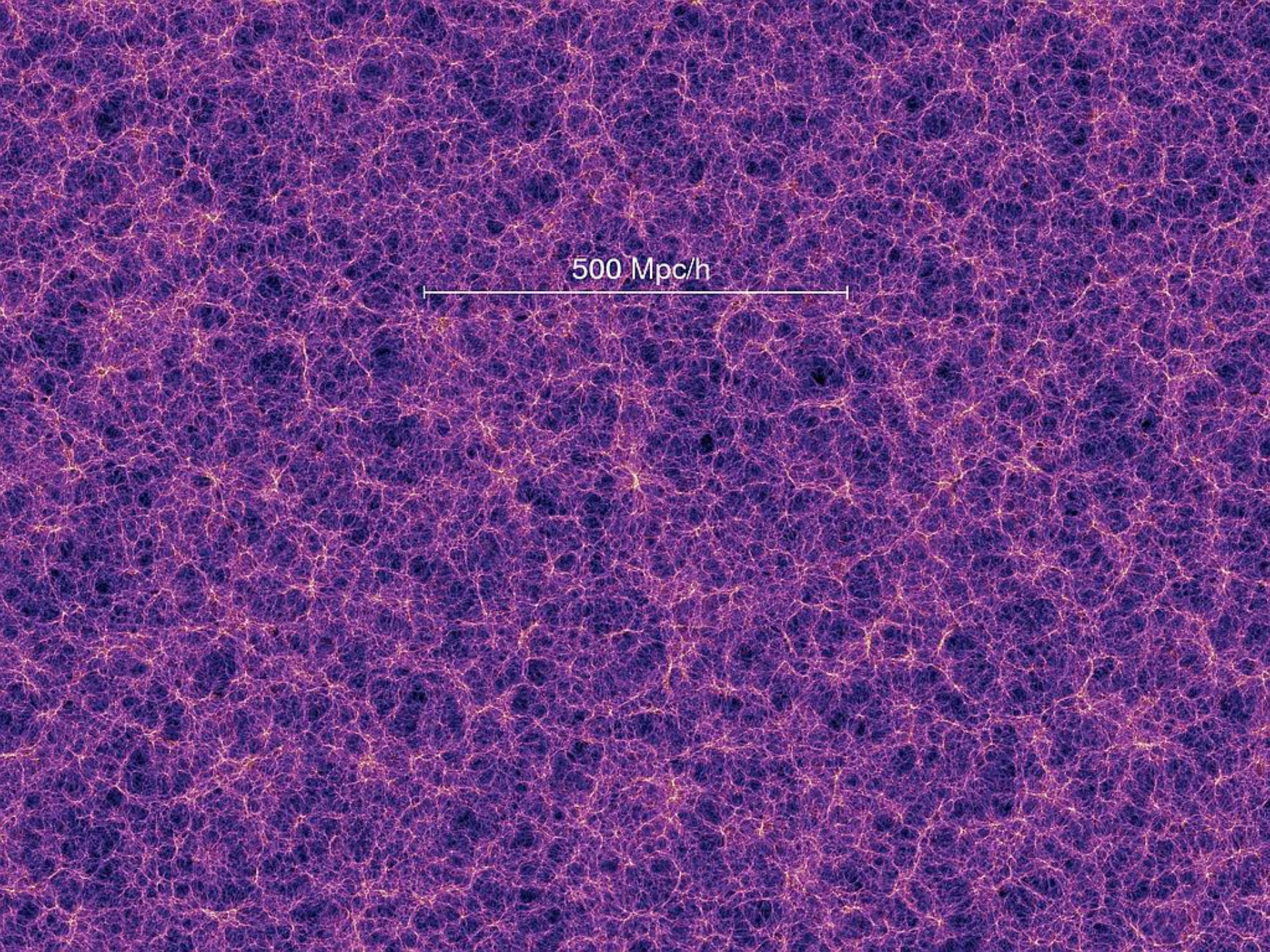
Jede Hubble-Blase kann zu einem gegebenen Zeitpunkt t (gemessen vom Urknall) durch einen eindeutigen Quantenzustand beschrieben werden

- Es gibt eine physikalisch sinnvolle kleinste Länge (Planck-Länge, $\sim 10^{-35}$ m) und eine physikalisch sinnvolle kleinste Zeit (Planck-Zeit, $\sim 10^{-44}$ s)
- Mit dieser Länge lässt sich das Volumen der Hubble-Blase durch eine zwar riesengroße, aber endliche Zahl ausdrücken („moderne Sandzahl des Archimedes“ $\sim 10^{185}$ Phasenraumzellen)
- Es gibt dann ca. $10^{10^{118}}$ Kombinationsmöglichkeiten für die ca. 10^{80} Protonen sich auf die 10^{185} Phasenraumzellen aufzuteilen (Stichwort Paulisches Ausschließungsprinzip)



wir

EBENE-1-UNIVERSUM

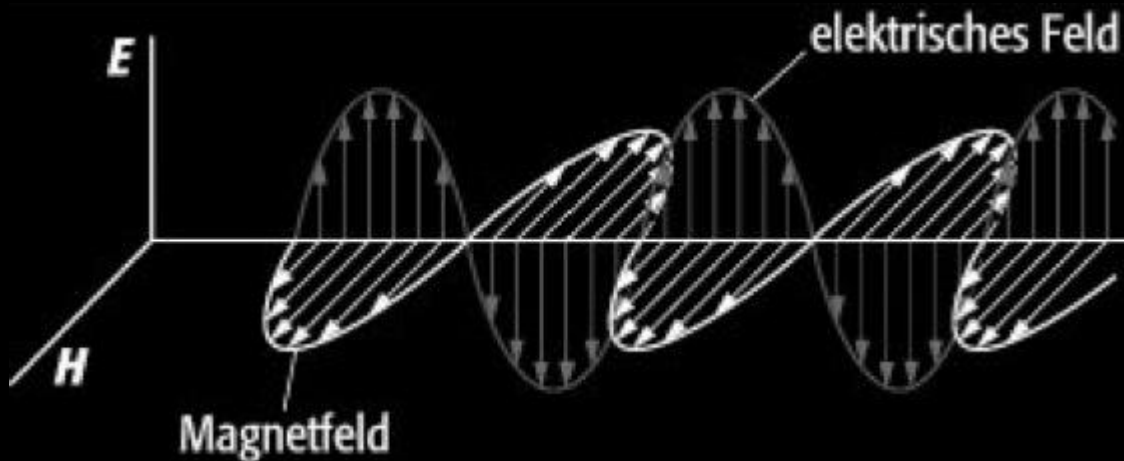


500 Mpc/h

Spezielle Relativitätstheorie – die Minkowski-Raum-Zeit

Anfang des 20. Jahrhunderts bestand ein wesentliches Forschungsprogramm im Nachweis des „Trägermediums“ der von James Clerk Maxwell theoretisch vorhergesagten und von Heinrich Hertz 1886 experimentell nachgewiesenen elektromagnetischen Wellen.

→ elektromagnetische Wellen: Transversalwellen (Stichwort: Polarisation)



Äthertheorie

Die Frage nach einem universellen „Trägermedium“ für zuerst optische Erscheinungen (Young, Fresnel), für die Gravitation (Problem Fernwirkung) und später für alle elektromagnetischen Erscheinungen (Maxwell) führte zur Einführung des sogenannten „Äthers“, der den gesamten Kosmos gleichmäßig ausfüllen sollte.

- Man konnte sich in Analogie zu Wasserwellen (Transversalwellen) und zu Schallwellen (Longitudinalwellen) die Lichtausbreitung und die damit verbundenen Beugungs- und Interferenzerscheinungen nur im Zusammenhang eines „Trägermediums“ denken.
- Dieses „Trägermedium“ wurde als denknotwendig postuliert und dessen Existenz bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts nicht explizit hinterfragt
- Man versuchte aber im Rahmen der Mechanik die Eigenschaften dieses „Mediums“ zu bestimmen (in Analogie zur Wellenausbreitung in Festkörpern), die es haben muss, wenn sich darin elektromagnetische Wellen ausbreiten sollen

Physikalische Eigenschaften des „Universellen Äthers“

Er füllt den gesamten kosmischen Raum gleichmäßig aus und bildet darin ein absolut ruhendes Bezugssystem

Problem:

Dann müsste sich eine Relativbewegung zu diesem „Äther“ irgendwie messen lassen

Die von James Bradley 1725 entdeckte Aberration des Lichtes kann nur unter der Annahme eines ruhenden Äthers erklärt werden. Da sich aber die Erde um die Sonne bewegt, muss es aber eine relative Geschwindigkeit zwischen Erde und Äther geben (Stichwort: Ätherwind“).

→ teilweise „Mitführung“ des Äthers mit der Materie, um zumindest lokal eine verschwindende Relativbewegung zwischen Materie und Äther postulieren zu können

Die Theorie des ruhenden bzw. mitgeführten Äthers führt zu unauflösbaren Widersprüchen

Mechanische Äthertheorie

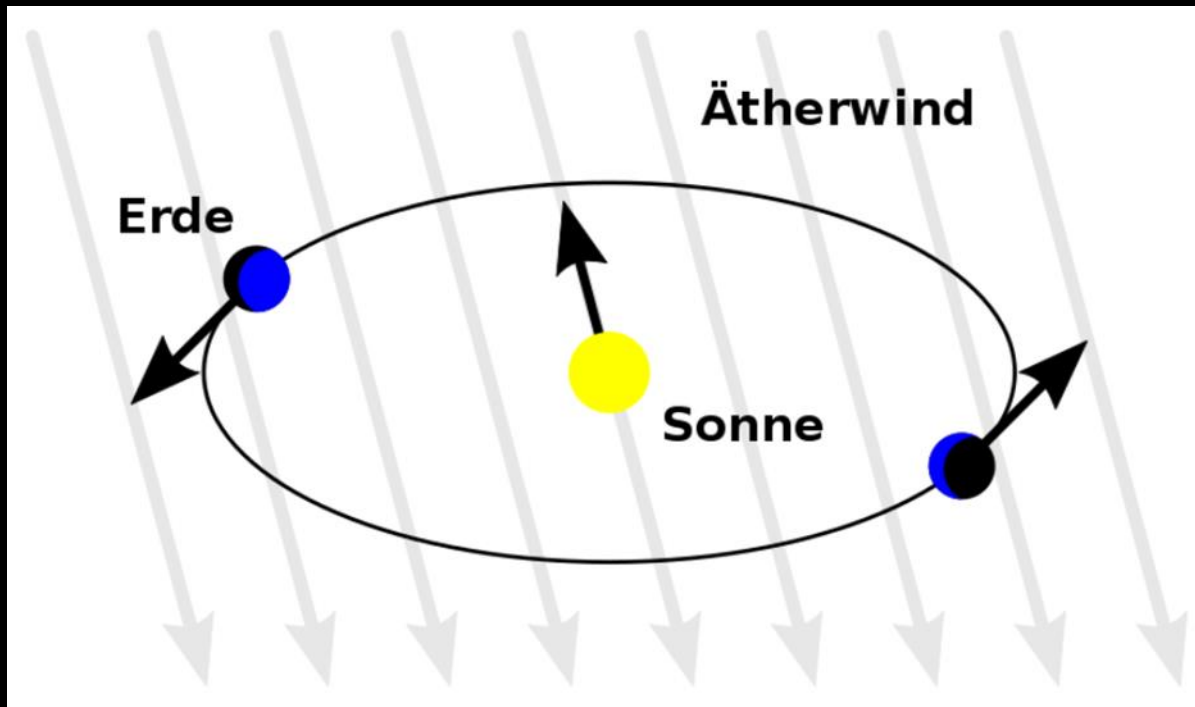
Ein „Medium“ sollte immer einen mechanischen Widerstand („Druck“) aufbauen. Da sich aber die Planeten quasi „reibungsfrei“ um die Sonne bewegen, muss der Äther 150 Milliarden mal weniger dicht sein als die atmosphärische Luft

Der „Äther“ ist die Ursubstanz der Welt und die „Materie“ nur spezielle „Anregungen“ davon, quasi „Ätherwirbel“: „Äther“ als Flüssigkeit, „Materie“ als „Wirbel“, die sich darin bewegen (Lord Thomson (Kelvin))

Der „Äther“ ist ein Festkörper, welcher sich lokal „verflüssigt“, wobei die entstehende „Flüssigkeit“ die „Materie“ darstellt. Die Stellen der „Verflüssigung“ („Materiekumpen“) bewegen sich derartig weiter, dass sich der „Äther“ hinter ihnen wieder verfestigt, d. h. erstarrt (Paul Langevin) .

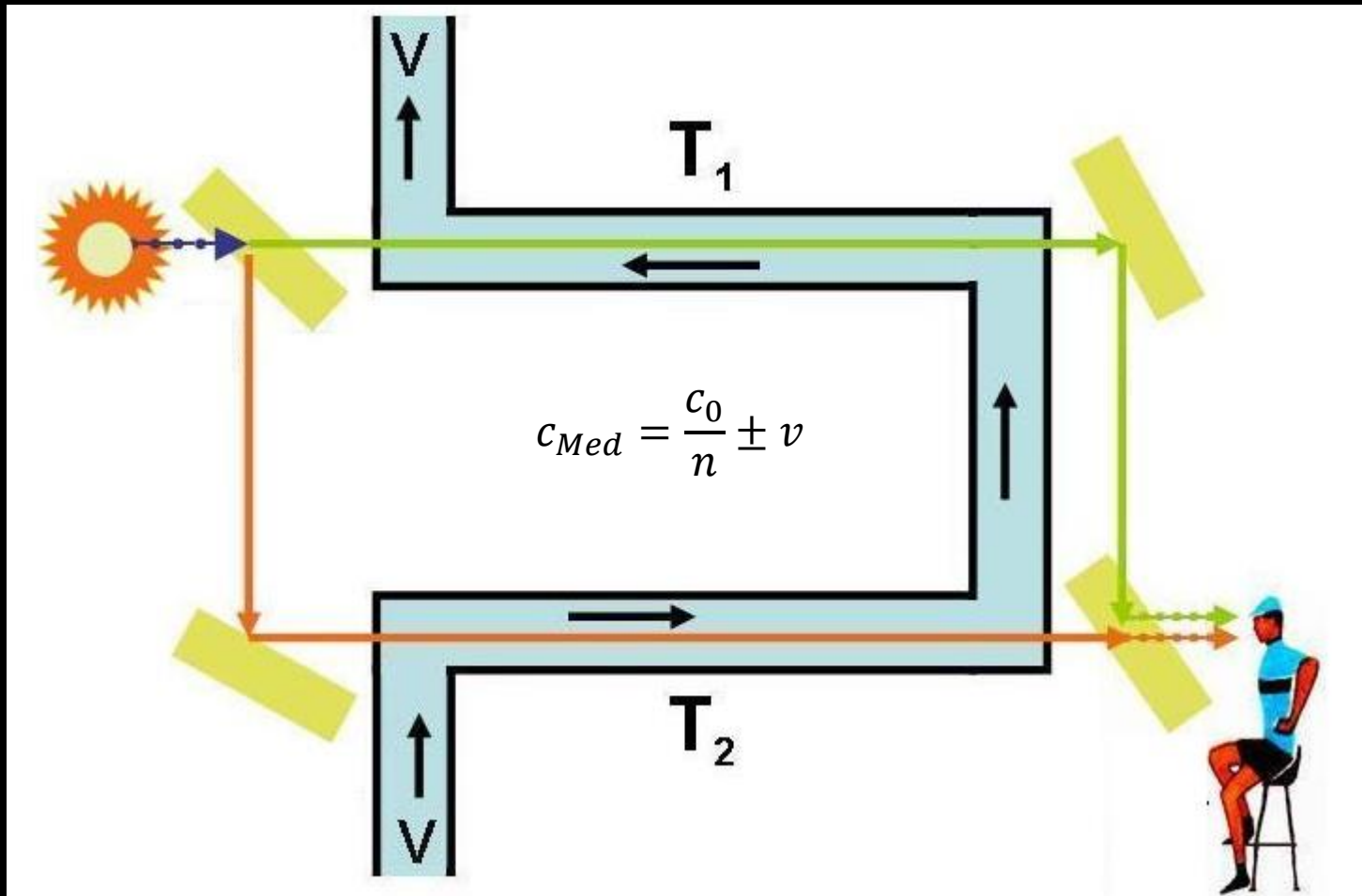
→ damit der Äther in Analogie zu Festkörperwellen die dazu extrem kurzen Lichtwellen übertragen kann, muss er extrem starr sein

Michelson-Morley-Experiment (1881 bzw. 1887)



Die Erde sollte bei ihrem Umlauf um die Sonne eine Art „Ätherwind“ spüren. Dessen experimenteller Nachweis würde die Ätherhypothese bestätigen.

Fizeauscher Mitführungsversuch (1851)

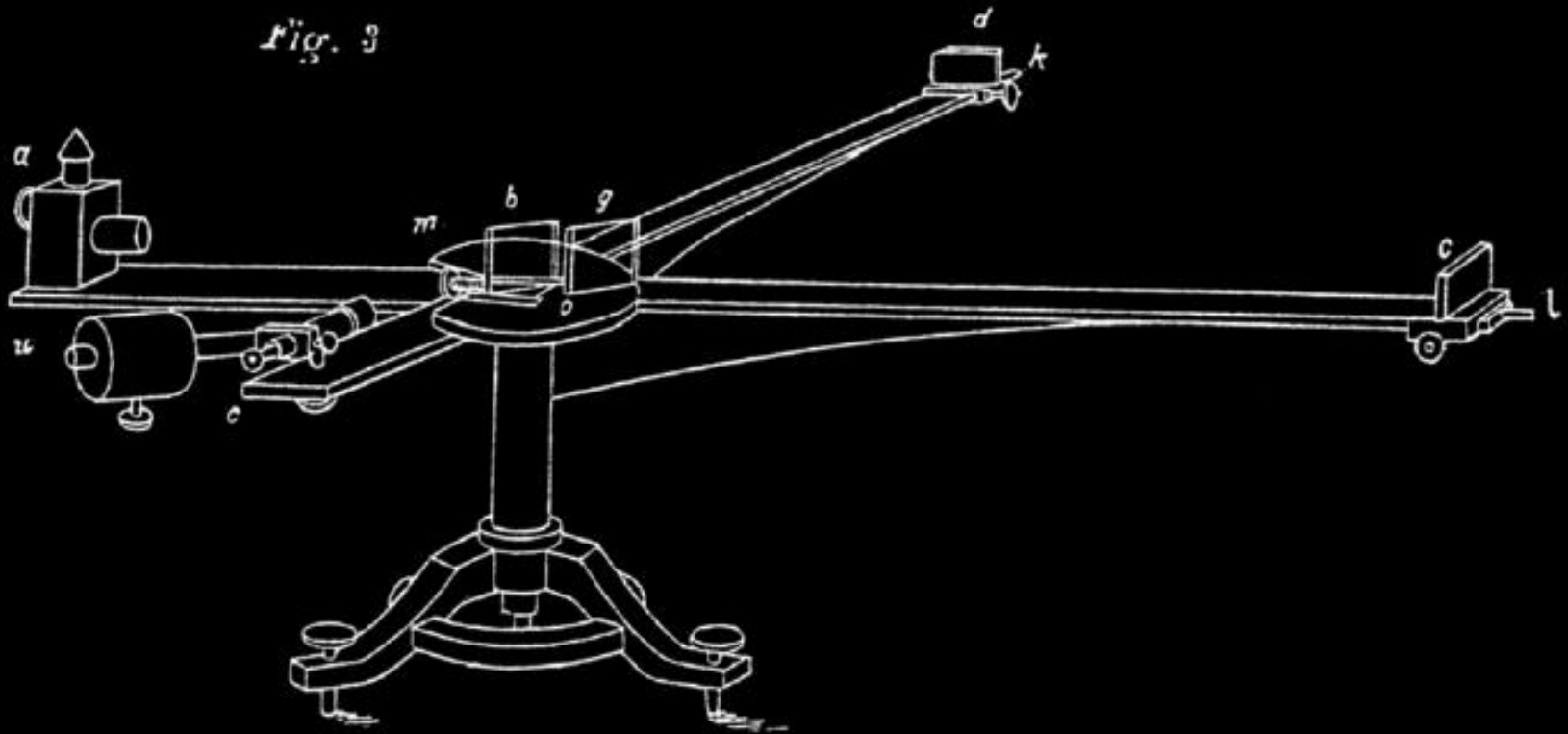


Experimentelles Ergebnis:

$$c_{Med} = \frac{c_0}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

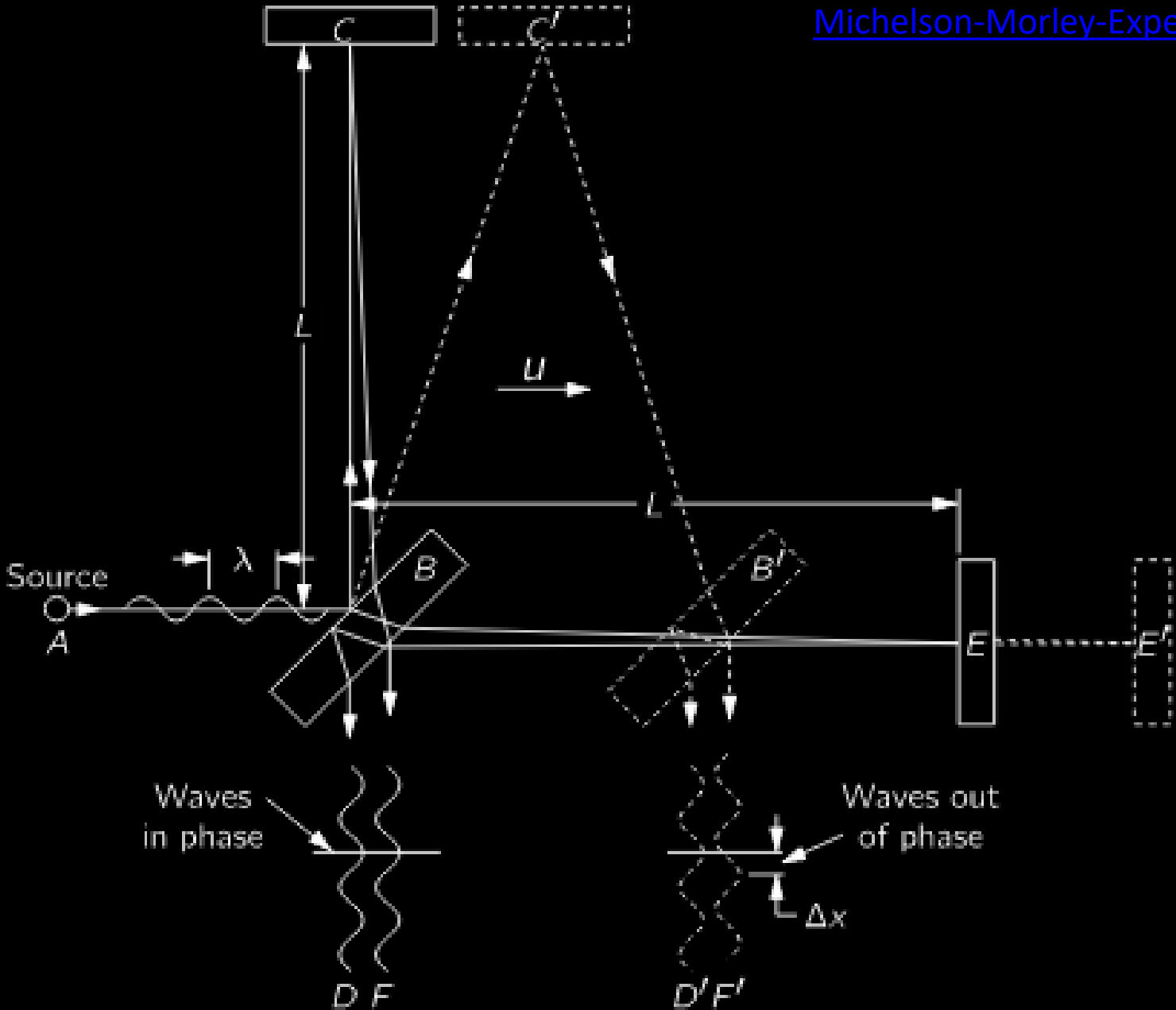
n = Brechungsindex

Das Michelson-Morley-Experiment



Zielsetzung: Nachweis der Bewegung der Erde in Bezug auf den ruhenden „Weltäther“

VIDEO:
[Michelson-Morley-Experiment](#)



Quintessenz:

Elektromagnetische Wellen („Licht“) benötigen kein Trägermedium. Es gibt keinen „Weltäther“

Die Maxwellsche Elektrodynamik führt zu der Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = \text{konstant}$$

In der klassischen Mechanik gilt das „Klassische Additionstheorem“ der Geschwindigkeiten in Form der sogenannten „Galilei-Transformationen“. Die Maxwellsche Elektrodynamik steht im Widerspruch zu den „Galilei-Transformationen“. Es gilt vielmehr:

„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“

→ PRINZIP DER KONSTANZ DER LICHTGESCHWINDIGKEIT

In der Klassischen Elektrodynamik gibt es offensichtlich Phänomene, die von der Wahl eines Inertialsystems abhängen. Naturgesetze sollten aber unabhängig von einem bestimmten Inertialsystem sein.

→ Aufbau eines Kalküls, welches das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als Axiom enthält.

Die mechanischen und elektrodynamischen Gesetze müssen so formuliert werden, dass sie sich nicht ändern, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem wechselt unter der Prämisse, dass in beiden Inertialsystemen die Vakuumlichtgeschwindigkeit den gleichen konstanten Wert hat.

→ Revision des Begriffs der Gleichzeitigkeit mit der Erkenntnis, dass Längen und Zeitintervalle relativ sind, d. h. vom Bewegungszustand eines Beobachters abhängen



SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;* *von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Zeit und die Kausalstruktur der Welt

Kausalität ist eine Erfahrungstatsache und nach Kant a priori gegeben ...

Kausalität (lat. *causa*, Ursache) bezeichnet die Beziehung zwischen Ursachen und Wirkungen. Umgangssprachlich ist ein Ereignis oder Zustand A die Ursache einer Wirkung B, wenn A ein Grund ist, der B herbeiführt.

Eine **Kausalkette** ergibt sich, wenn jede Wirkung selbst wieder Ursache eines neuen Ereignisses ist. Sie spiegelt die transitive Natur der Kausalität wieder.

Eine Ursache kommt immer vor einer von ihr bedingten Wirkung



Der Begriff des Ereignisses ...

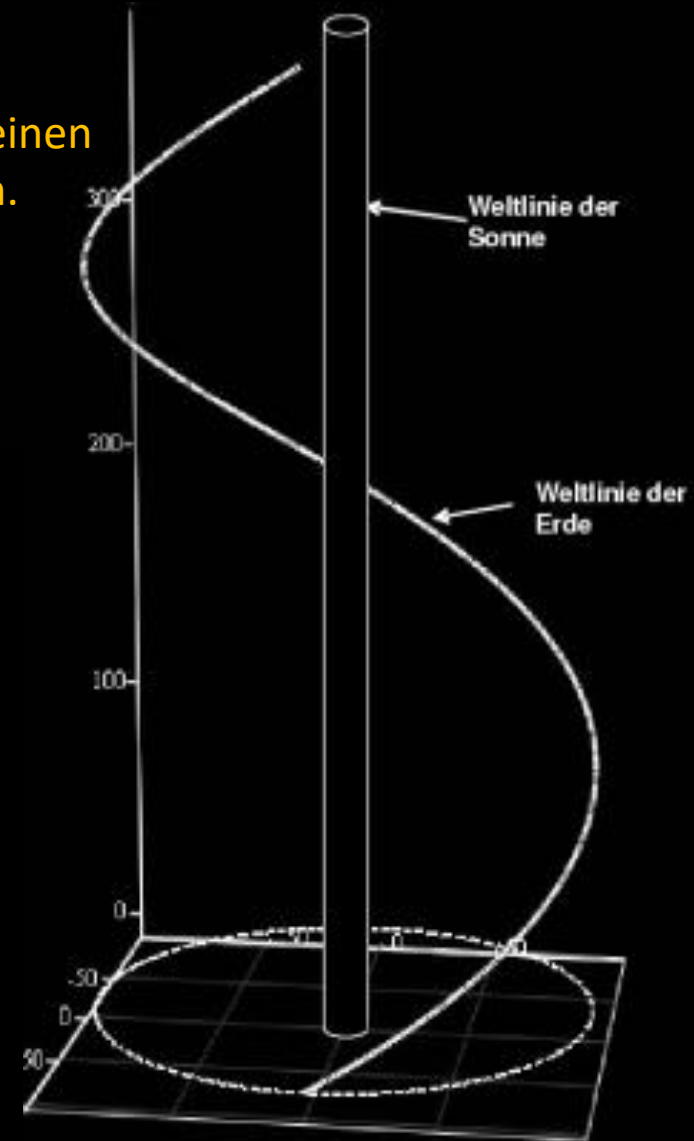
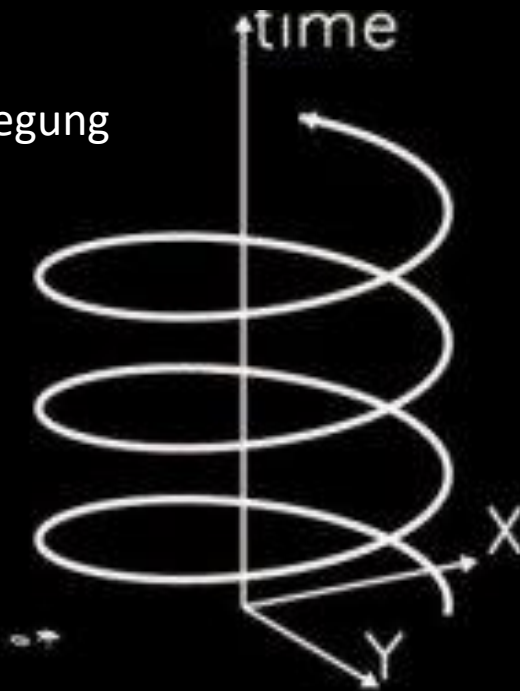
Ort (x,y,z) + Zeit (t) = Ereignis (x,y,z,t)

Ein „Ereignis“ ist eindeutig durch einen Zeitpunkt t und einen Ort x,y,z , an dem es zum Zeitpunkt t stattfindet, gegeben.

Eine stetige „Linie“ von Ereignissen durch die Raum-Zeit nennt man „Weltlinie“

Weltlinie einer Kreisbewegung

Weltlinien verbinden
Ereignisse kausal



Klassische Mechanik:

Kausalität definiert eine strenge Ordnung von Ereignissen, d.h. Ereignisse lassen sich in eine topologische Reihenfolge bringen, die eindeutig ist und für die eine Kausalkette gilt und die sich durchnummerieren lässt (durch Zuordnung von Zeitpunkten gemäß der absoluten Zeit Newtons).

Ereignisse, die in der Gegenwart liegen, sind gleichzeitig

$A(x,y,z,t) \rightarrow B(x^*,y^*,z^*,t)$ A und B sind gleichzeitig.

Ereignisse, die zusammen einmal in der Gegenwart lagen, waren gleichzeitig

Die Newtonsche Mechanik besitzt eine strenge Kausalstruktur im Sinn der Anordnung von Ereignissen, ist aber in Bezug auf die Zeitrichtung symmetrisch.

(d.h. alle Ereignisfolgen von der Vergangenheit in die Zukunft sind auch in umgekehrter Reihenfolge erlaubt, d. h. die Zeit dient nur als Parameter und definiert keine Richtung → Paradox der Zeit)

Das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“

$$c_0 = 2.998925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



Folgt explizit aus der Maxwellschen Elektrodynamik und wurde experimentell in dem Interferometrieversuch von Michelson und Morley 1889 bestätigt.

Albert Einstein machte dieses Prinzip und das „**Spezielle Relativitätsprinzip**“ (d. h. „die Gesetze der Maxwellschen Elektrodynamik sind in allen Inertialsystemen gleich“) zur Grundlage einer neuen physikalischen Weltbeschreibung, die bei Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, nahtlos in die „Klassische Mechanik“ Newtons übergeht.

Da die Geschwindigkeit gleich Weg durch Zeit ist und die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen konstanten Wert hat, gilt:

- **Lichtweg = Lichtgeschwindigkeit mal Zeit**
- Man kann mathematisch die Zeit wie eine Länge behandeln

Ereignis: $(x, y, z, -c \cdot t)$ \rightarrow „vierdimensionaler Raum“

Der Minkowski-Raum

1907: Ereignisraum der speziellen Relativitätstheorie

- Punkte sind Ereignisse
- Ereignisse bilden ein vierdimensionales Kontinuum
- Metrik ist pseudo-euklidisch (wegen der Zeitkoordinate)
- Teilräume repräsentieren die Kausalstruktur der Welt für einen Beobachter

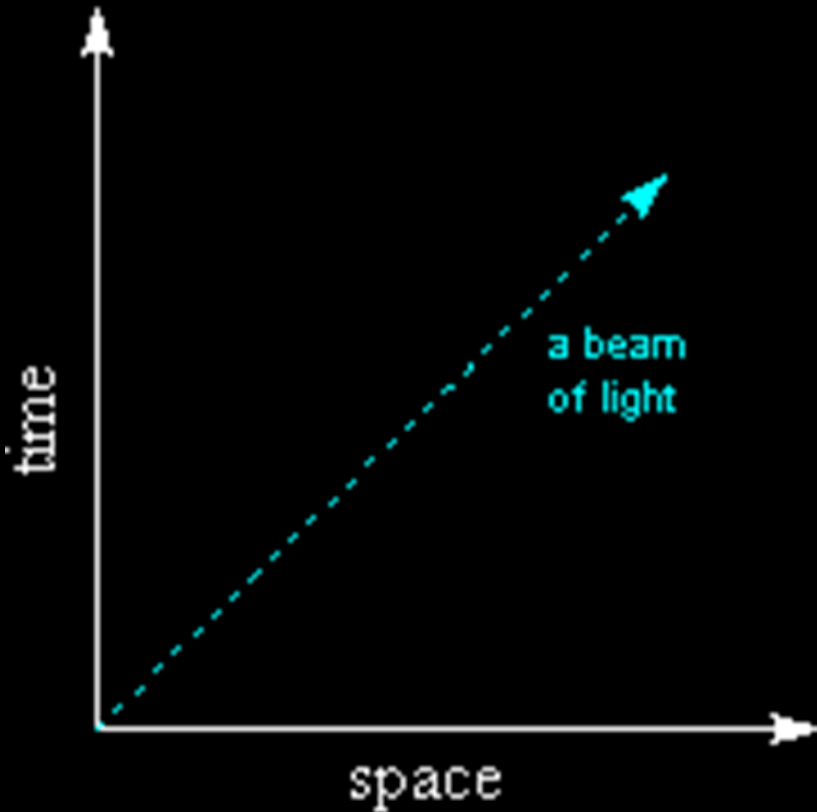
Von nun an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren ...

Zur Vereinfachung: Raum wird zur Ebene (nur x und y –Koordinate)
Zeit wird als 3. räumliche Koordinate dargestellt (d. h. als Lichtweg)



Hermann Minkowski
(1864-1909)

Raum – Zeit - Diagramm



$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

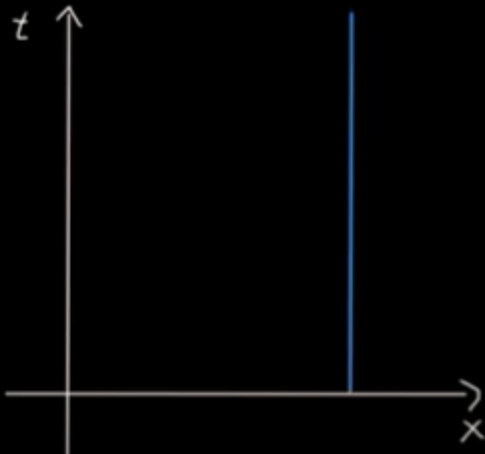
$$x_3 = z$$

$$x_4 = -c_0 t$$

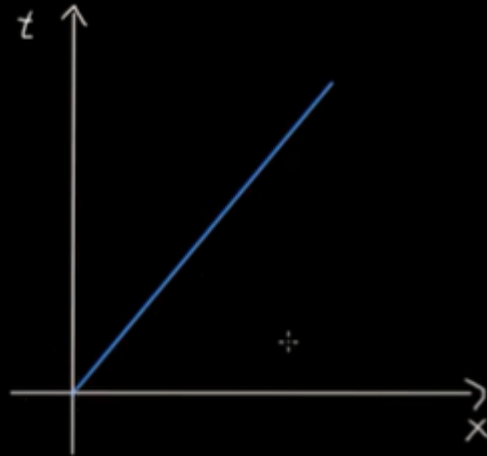
Jeder Punkt in diesem Diagramm stellt ein Ereignis, jede stetige Linie eine Weltlinie dar

Das Diagramm ist so skaliert, dass die Kurve eines lichtschnellen Teilchens (Photon) eine Gerade mit einem Anstellwinkel von 45° bildet (Beispiel: zweidimensionale Raum-Zeit)

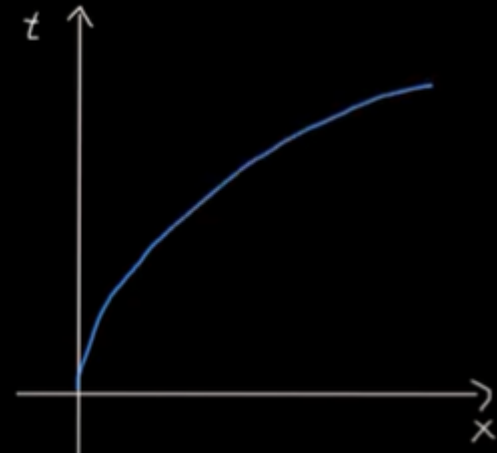
Beispiel: Relativität der Gleichzeitigkeit



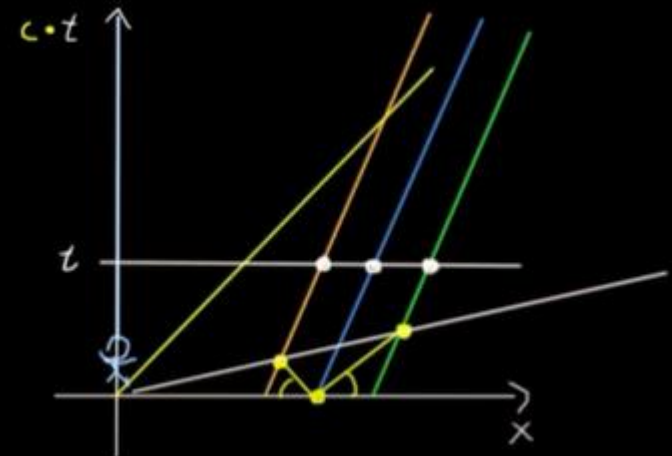
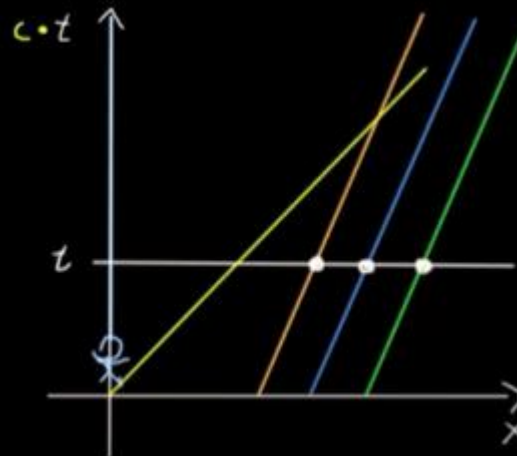
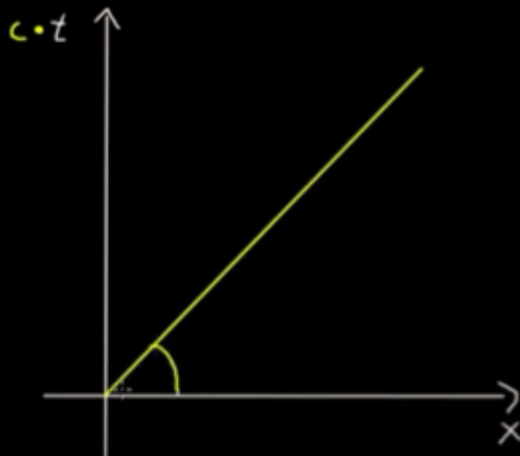
$v=0$

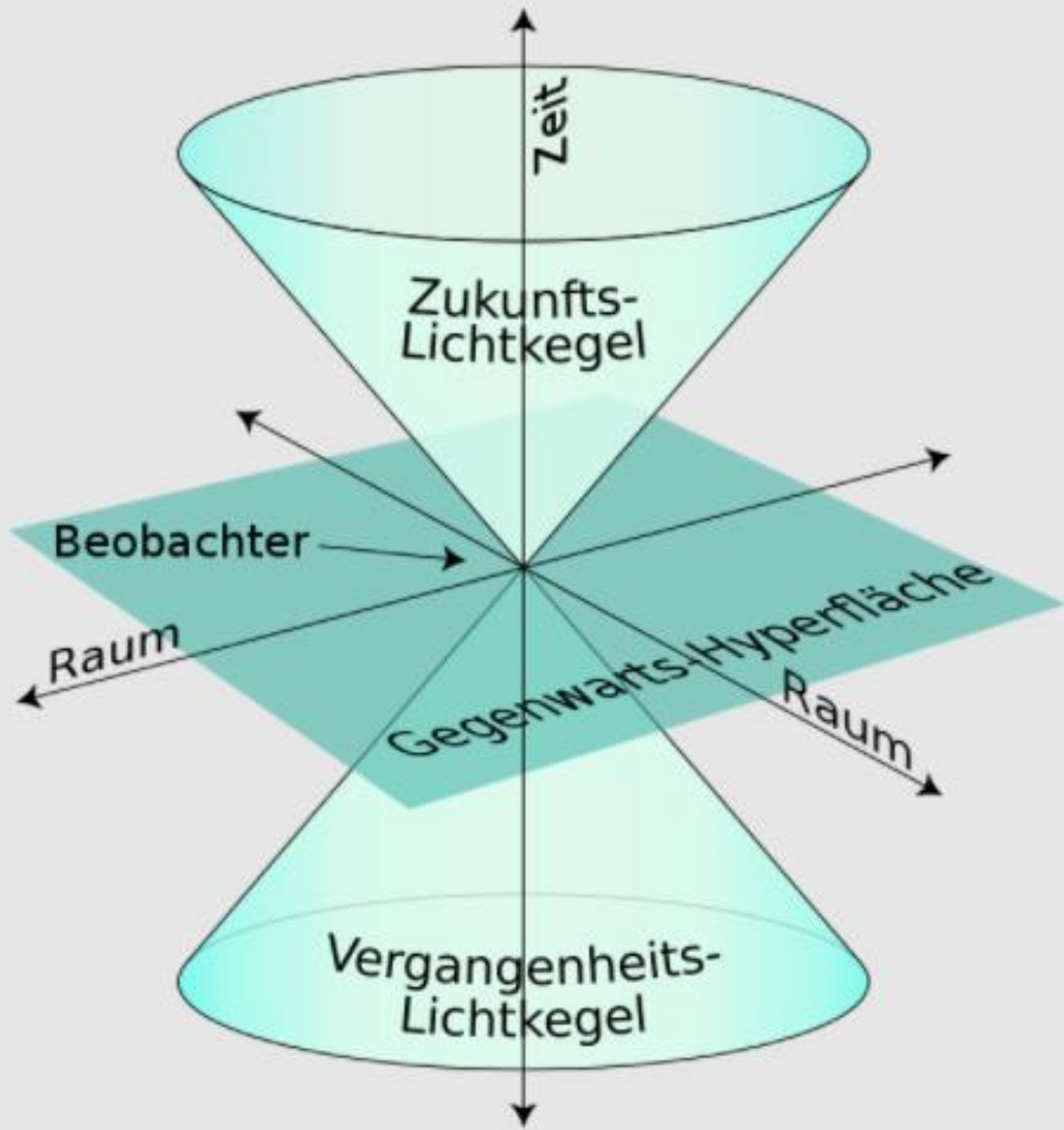


$v > 0 = \text{const.}$



$v = a \cdot t$ (beschleunigt)





Raum-zeitliche Abstände im Minkowski-Raum:

Metrik: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$

„Raumzeitlicher Abstand zwischen zwei Ereignissen“

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{„räumlicher“ Abstand}$$

$$dx_4^2 = -c_0^2 dt^2 \quad \text{„zeitlicher“ Abstand}$$

1. Zeitlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem räumlichen Anteil

$$dr^2 < c_0^2 dt^2 \quad \text{zeitartiges Intervall } ds^2$$

Alle Materieteilchen legen in einem Meter Lichtlaufzeit stets weniger als einen Meter im Raum zurück → Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit

2. Räumlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 > c_0^2 dt^2 \quad \text{raumartiges Intervall } ds^2$$

Materieteilchen müssten sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, um zwei raumartige Ereignisse miteinander zu verbinden

3. Räumlicher Anteil des Intervalls ist gleich dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 = c_0^2 dt^2 \quad \text{lichtartiges Intervall } ds^2$$

Wenn ein Ereignis durch Aussenden eines Lichtsignals ein anderes Ereignis direkt beeinflussen kann, dann sind diese beiden Ereignisse lichtartig miteinander verbunden

Kausalstruktur der Minkowski-Raum-Zeit

Durch die Endlichkeit und die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand des Bezugssystems wird eine zeitliche Ordnung und damit auch eine Kausalordnung zwischen Ereignissen gewährleistet.

- ✓ **Ereignisse, die raumartig zueinander liegen, können sich kausal nicht beeinflussen.**
- ✓ **Wir können durch Handlungen nur die Zukunft beeinflussen**
- ✓ **Vergangene Ereignisse können die Gegenwart beeinflussen**

Das Kausalprinzip (Kausalitätsprinzip) bedeutet, dass jedes Geschehen seine (materielle) Ursache hat, und es keine ursachelosen, "akausalen" Dinge, Erscheinungen, Abläufe usw. gibt. Dieses in elementarer Form bereits von Aristoteles formulierte Kausalprinzip entspricht der Interpretation des Satzes vom zureichenden Grund: "*nihil fit sine causa*" ("nichts geschieht ohne Ursache").

Preisfrage: Ist die Kausalität ein absolut gültiges Naturgesetz?

→ Zweifel sind angebracht (Quantenmechanik, verschränkte Systeme)

Die Endlichkeit und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum prägt der Welt eine Makro-Kausalitätsstruktur auf:

→ Vergangenheit – Gegenwart – Zukunft

Der raum-zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen ist eine Invariante

$ds^2 < 0$ Zeitartiger Abstand

$ds^2 = 0$ Lichtartiger Abstand

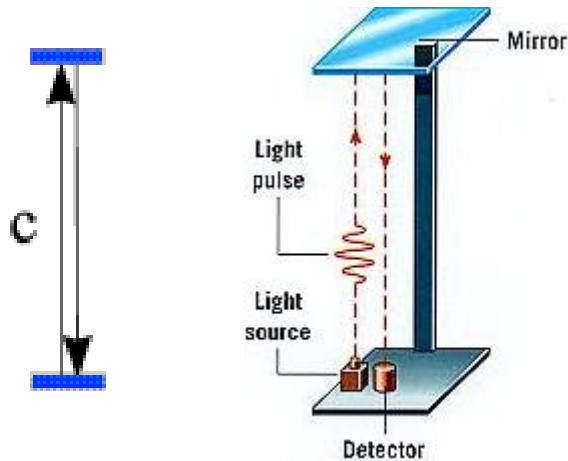
$ds^2 > 0$ Raumartiger Abstand

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

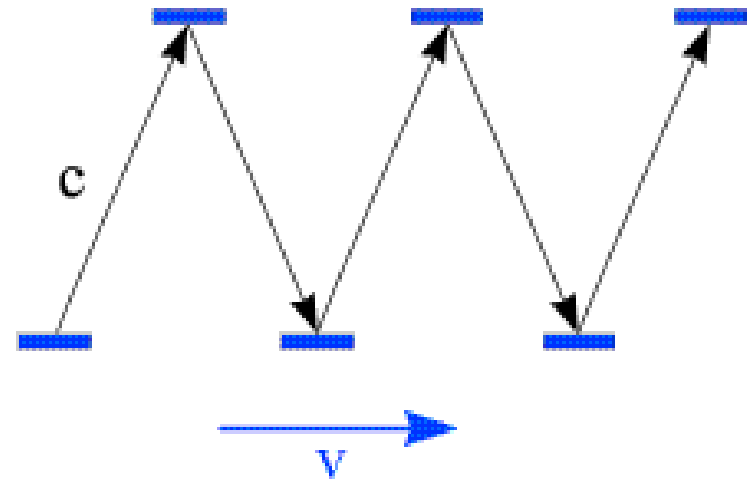
Minkowski-Metrik

Effekte der Speziellen Relativitätstheorie

Zeitmessung – die „Lichtuhr“

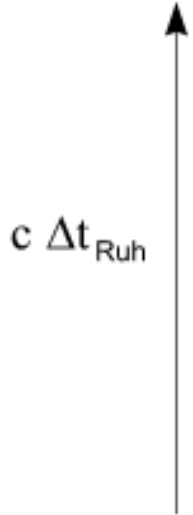


Ruhende Lichtuhr

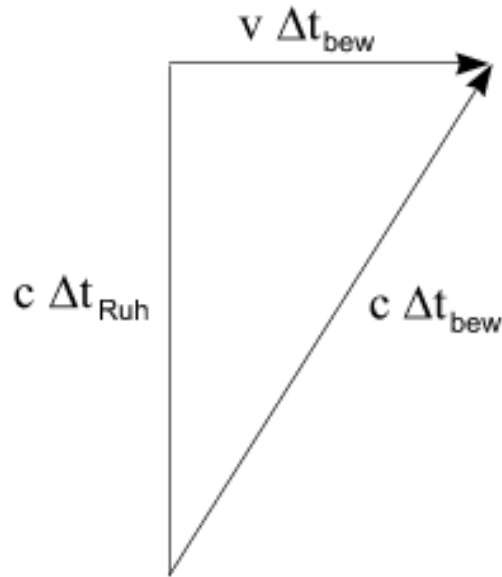


Bewegte Lichtuhr

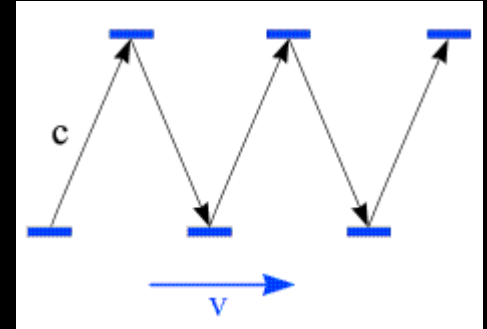
Zeit = Lichtlaufweg durch (konstante) Lichtgeschwindigkeit



Ruhende Lichtuhr



Bewegte Lichtuhr



$$(c\Delta t_{bew})^2 = (c\Delta t_{Ruh})^2 + (v\Delta t_{bew})^2$$

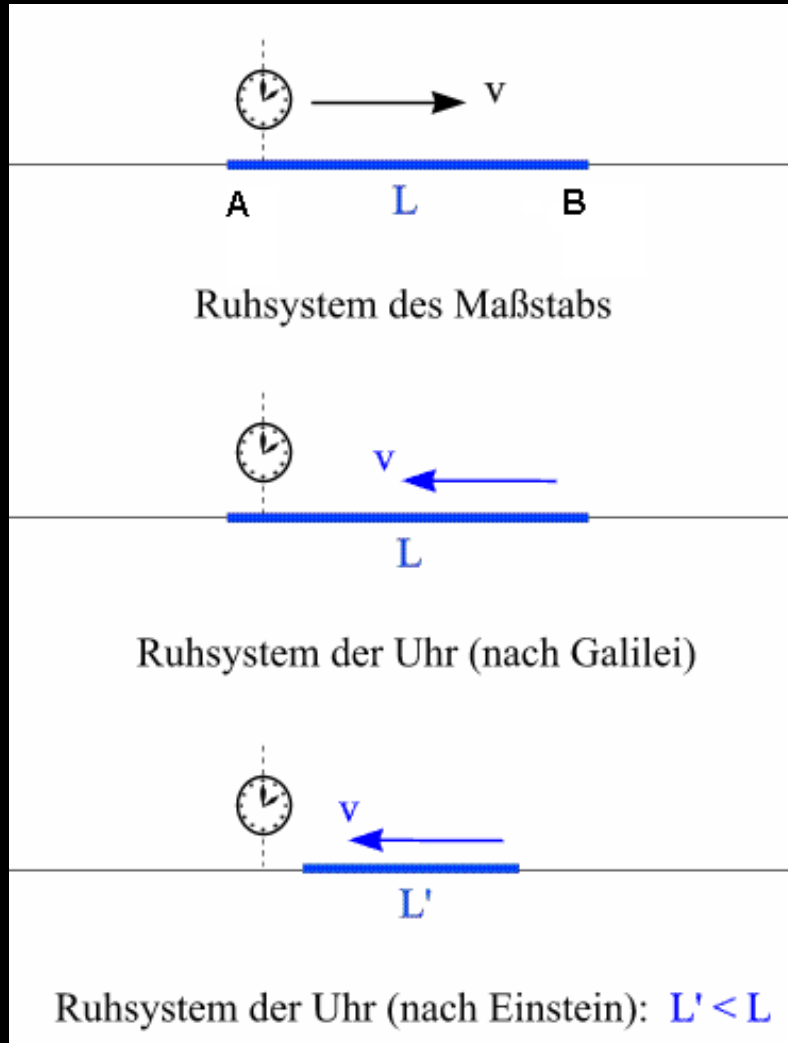
$$\Delta t_{bew} = \frac{\Delta t_{Ruh}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht um den Faktor

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

langsamer als in ihrem Ruhesystem

Die Lorentz-Kontraktion



Uhr bewegt sich entlang Maßstab L
Eigenzeit Uhr $< L/v$ (d. h. sie geht langsamer)

Maßstab L bewegt sich an der Uhr vorbei
Er schafft es aber in der Eigenzeit der
Uhr nicht wegen $t(\text{Uhr}) < L/v$

→ Widerspruch

Die Länge des Maßstabs ist – wenn sie
im Ruhsystem der Uhr gemessen wird –
kleiner als L, damit der Maßstab es schafft,
sich an der Uhr in der zur Verfügung
stehenden kürzeren Zeit $t(\text{Uhr})$ vorbei
zu bewegen

Im *Ruhsystem des Maßstabs* vergeht zwischen den Ereignissen A und B das Zeitintervall

$$\Delta t = L / v$$

Die Uhr selbst misst zwischen den Ereignissen A und B das (kleinere) Zeitintervall

$$\Delta t_{Uhr} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$$

Im Ruhsystem der Uhr hat der Maßstab also die Länge L' und benötigt fürs Vorbeifliegen die Zeit

$$\Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$$

Folglich gilt:

$$L' = v \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = L \sqrt{1 - \beta^2}$$

Ein mit Geschwindigkeit v bewegtes Objekt ist in Bewegungsrichtung um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ kürzer als in seinem Ruhsystem

Lorentzsche Längenkontraktion

Längenkontraktion wirkt nur in Bewegungsrichtung!

Aus dem Postulat der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen:

A) Bewegte Uhren gehen langsamer

B) Bewegte Körper sind in Bewegungsrichtung verkürzt

Ist das *wirklich* so?



Das „Garagen-Paradoxon“