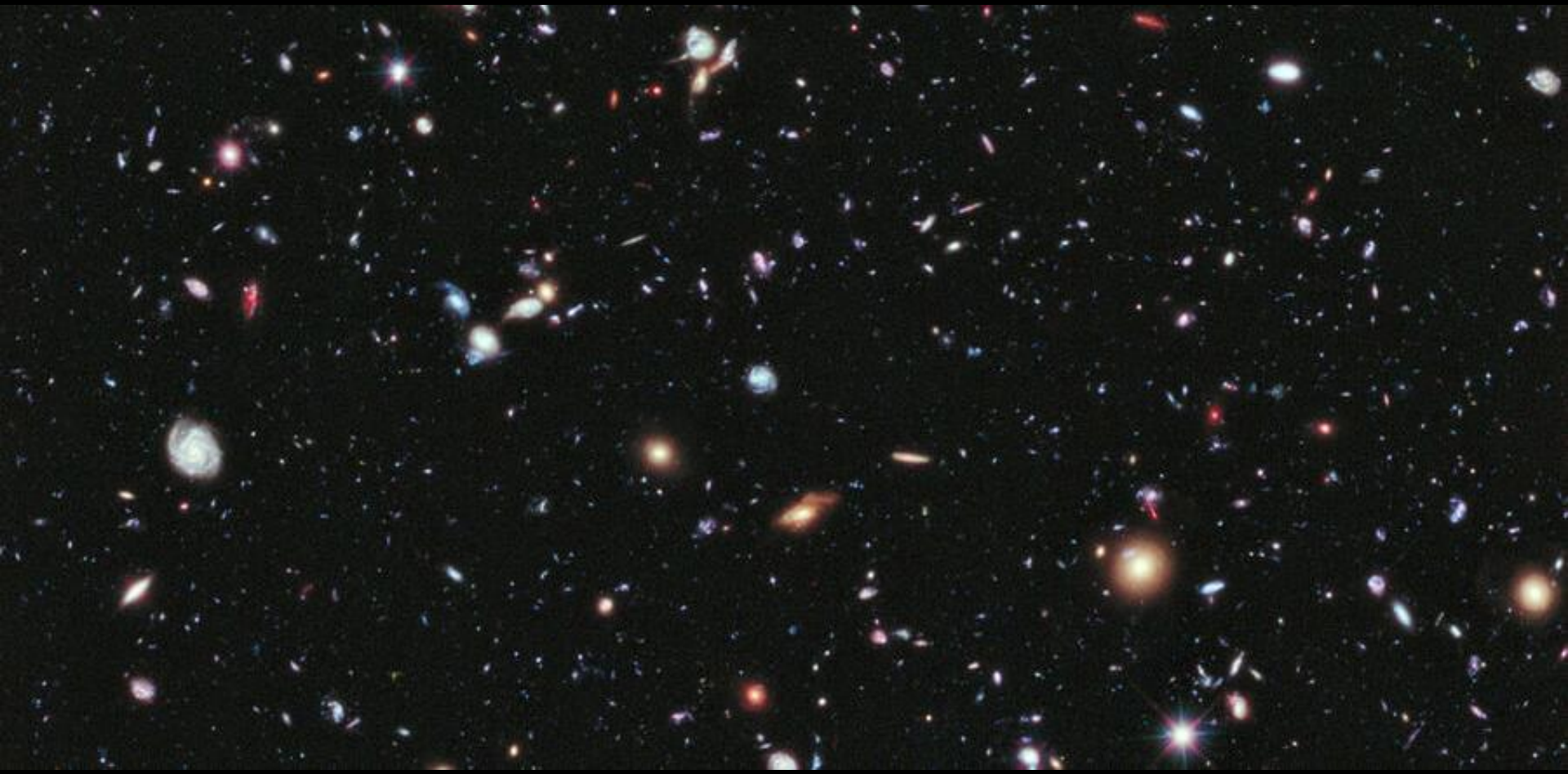
Anwendung der Topologie in der Kosmologie

Wie sieht das Universum aus?

Es geht hier um die topologische und geometrische Struktur des physikalischen Raumes und wie man sie durch Beobachtungen ermitteln kann.



Man muss unterscheiden:

a) den physikalischen Ortsraum (3-dimensional, lokal euklidisch)
b) den vierdimensionalen Ereignisraum (3+1-dimensional, lokal euklidisch) = „Raumzeit“

Der physikalische Raum ist eine der Erfahrung zugängliche Entität, dessen topologische und geometrische Struktur erforschbar ist.

Bevor man aber von einer „Struktur“ des physikalischen Raumes sprechen kann, muss man Begriffe definieren, mit der sich solch eine Struktur adäquat beschreiben lässt.

Mathematische Konzepte zur Beschreibung des physikalischen Raums

- Punktmenge
- Kontinuum
- Topologie
- Metrik

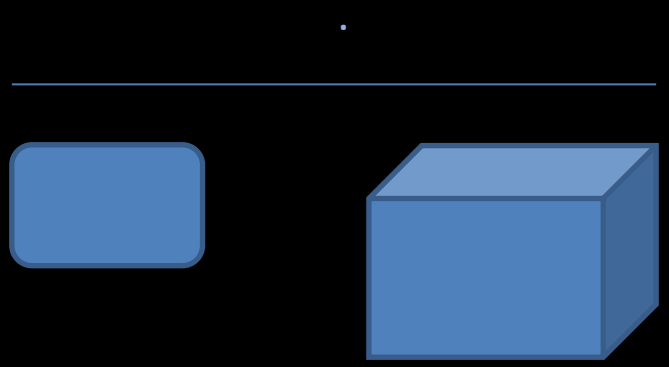
Das Abstraktum „Raum“

Man kann einen Raum als eine Menge von Punkten, die lückenlos dicht liegen („Orte“), abstrahieren. Einer solchen Punktmenge kann eine Topologie aufgeprägt sein.

→ Topologischer Raum

Die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade bestimmt die Dimensionszahl des Raumes

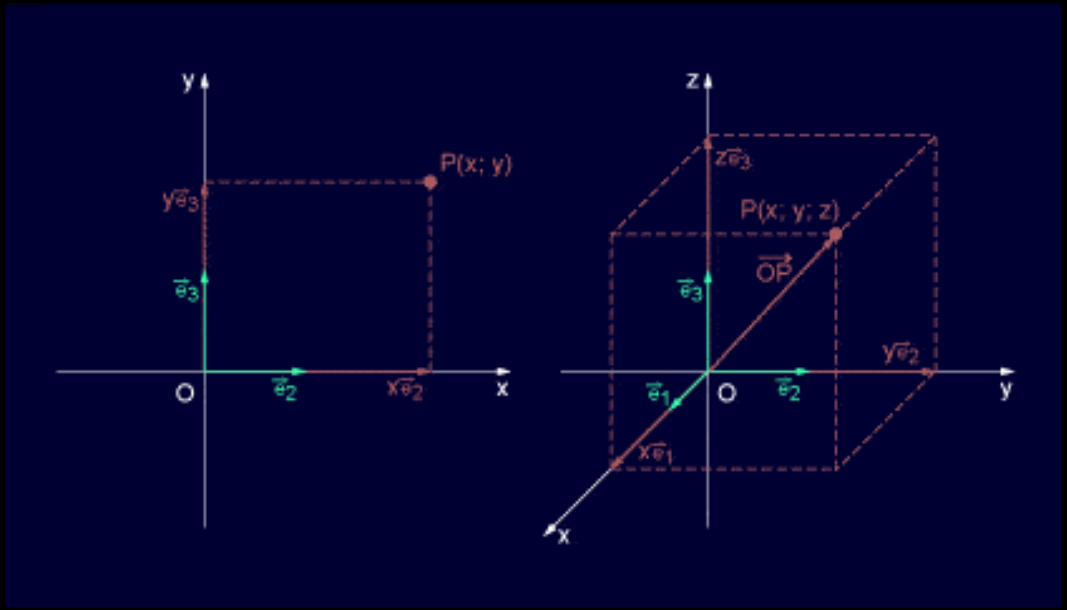
n = 0 Punkt
n = 1 Gerade
n = 2 Fläche
n = 3 Raum
n = 4 4-dimensionaler Raum
…
n = k k-dimensionaler Raum



Die „Punkte“ des Raumes werden in jede Koordinatenrichtung durch die Menge der reellen Zahlen R (die lückenlos dicht liegen und von denen es in jedem Intervall [a, b] unendlich viele gibt – Kontinuum) dargestellt.

Messen in Räumen – die Abstandsfunktion (Metrik) (*)

1. Einheitslänge festlegen
2. Koordinatensystem festlegen
3. Nullpunkt festlegen



1-dimensionaler Raum: Abstand d zum Nullpunkt = absoluter Betrag: $\mathrm{d}(0,\mathrm{x}) = |x|$

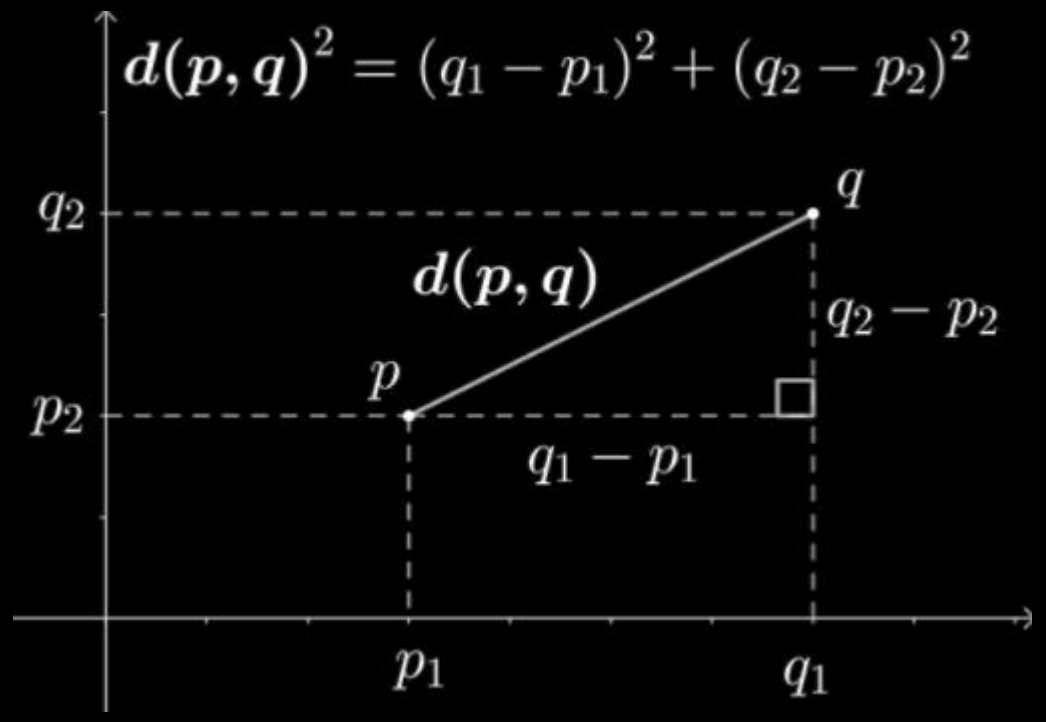
2-dimensionaler Raum: Abstand d zum Nullpunkt = Norm:

$$\mathrm{d}(0,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = \sqrt{x^2+y^2} = \|P(x,y)\|$$

3-dimensionaler Raum: $\mathrm{d}(0,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|P(x,y,z)\|$

(*) griech. *metron* = Maß, Länge

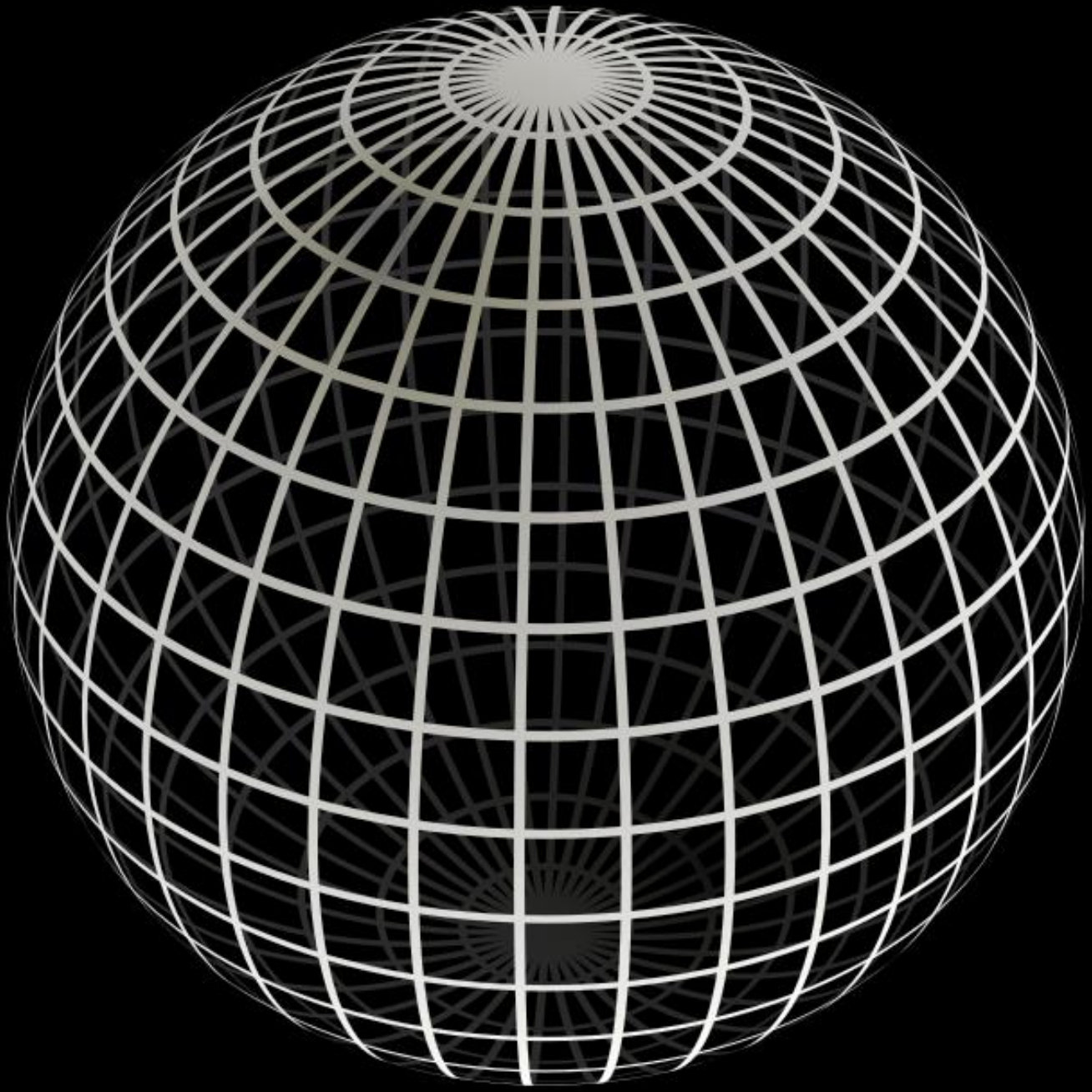
Der Abstand zwischen zwei Punkten = Metrik



Beispiel: n=2

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{p}(x_p, y_p), \mathrm{q}(x_q, y_q)\right) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} = \|p, q\|$$

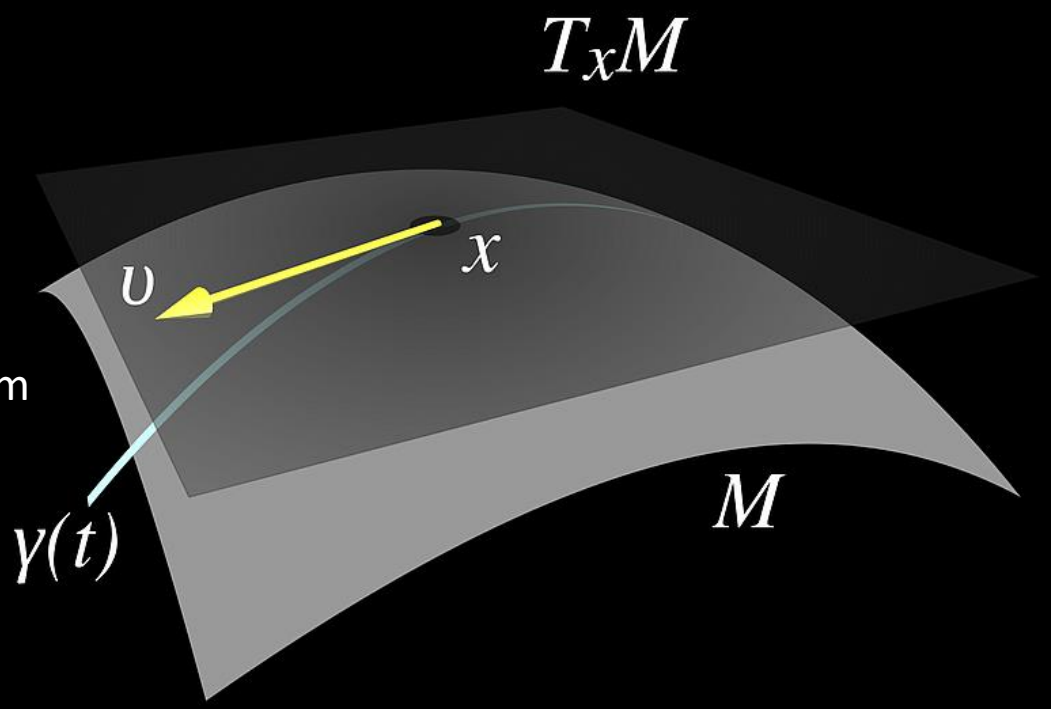
„Euklidsche Metrik“



Die „Euklidische Metrik“ ist nur in Euklidischen Räumen gültig, d. h. in n-dimensionalen Räumen, in denen das Euklidische Axiomensystem gilt (z. B. R^2 oder R^3).

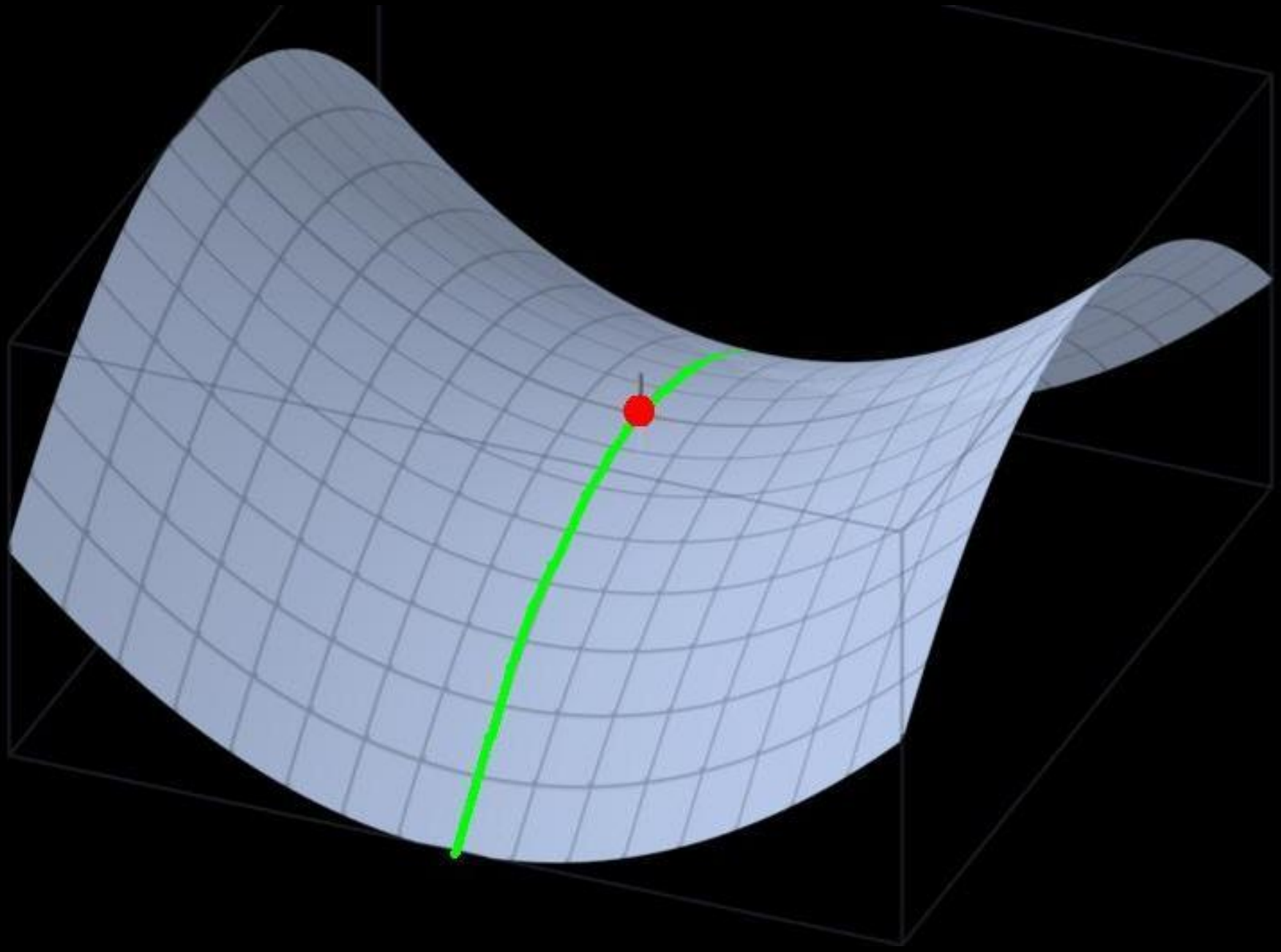
Tangentialraum

Man kann lokal zu einem Punkt x einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit einen Tangentialraum konstruieren, der eine Euklidische Metrik aufweist.

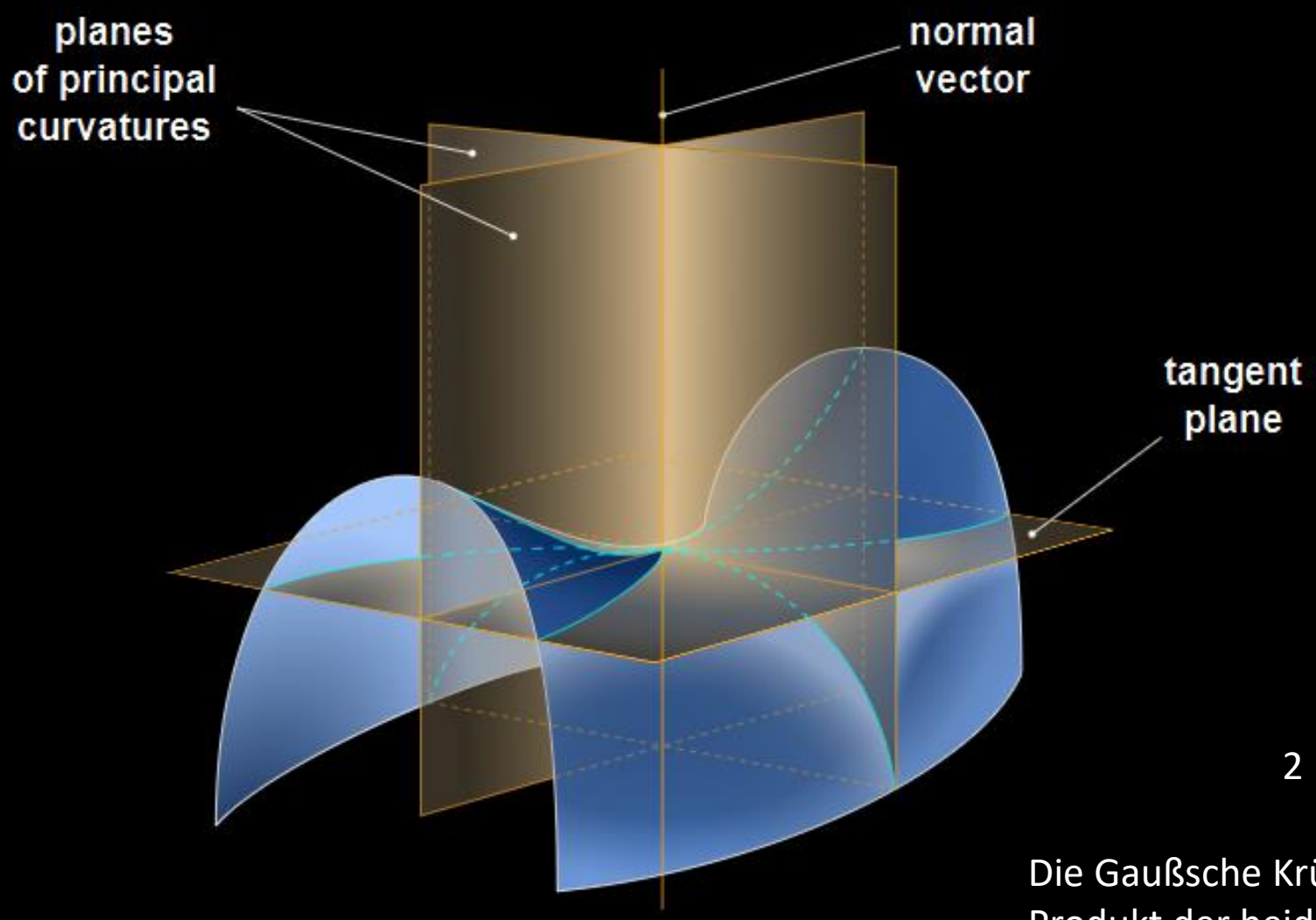


In „gekrümmten Räumen“ muss die Abstandsfunktion d(p,q) modifiziert werden.

→ Stichwort: Metrischer Tensor



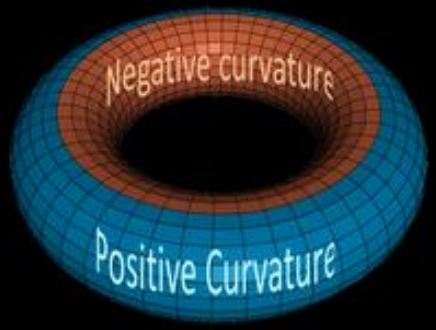
Gaußsche Krümmung

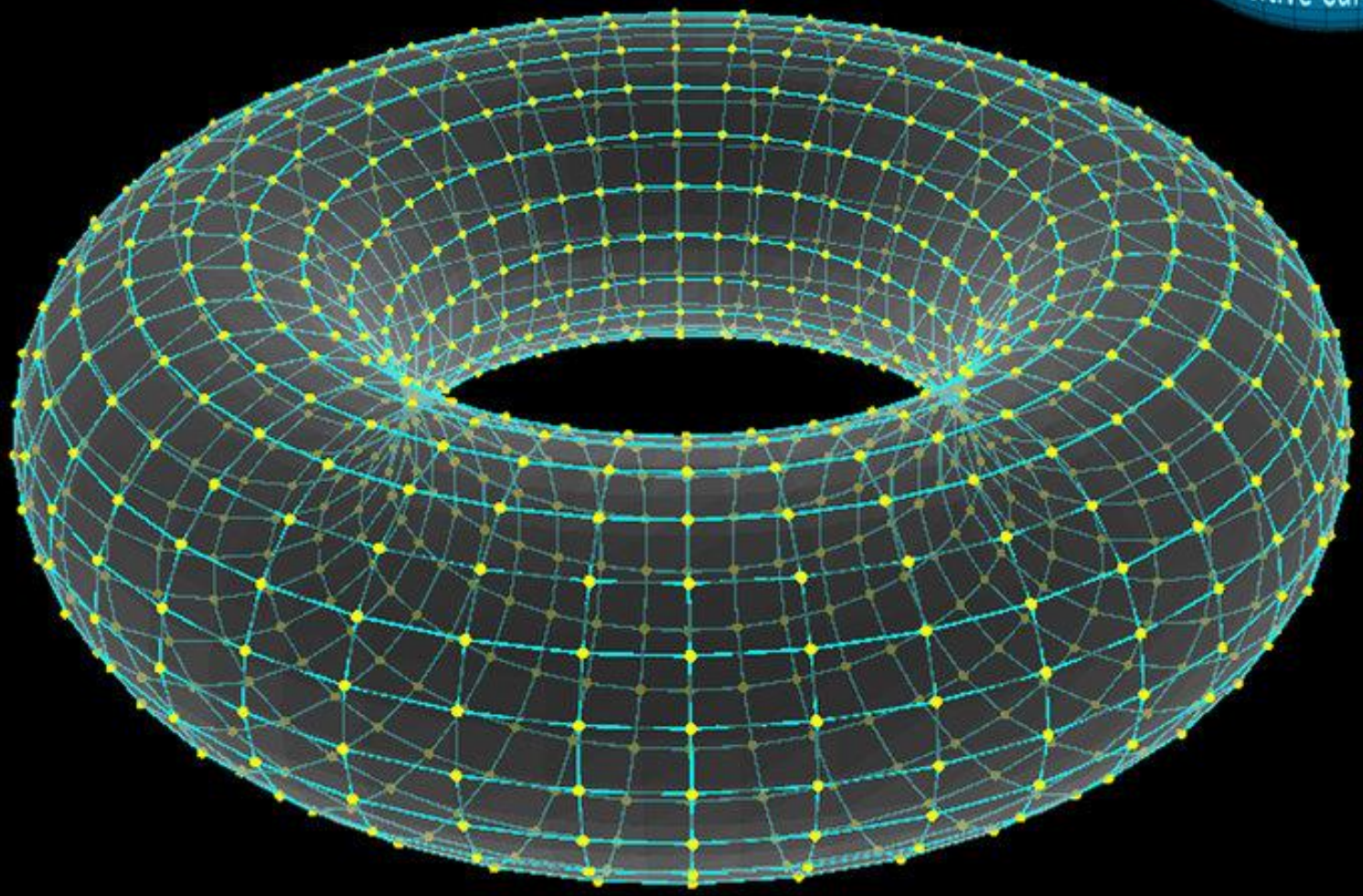


2 Normalebenen

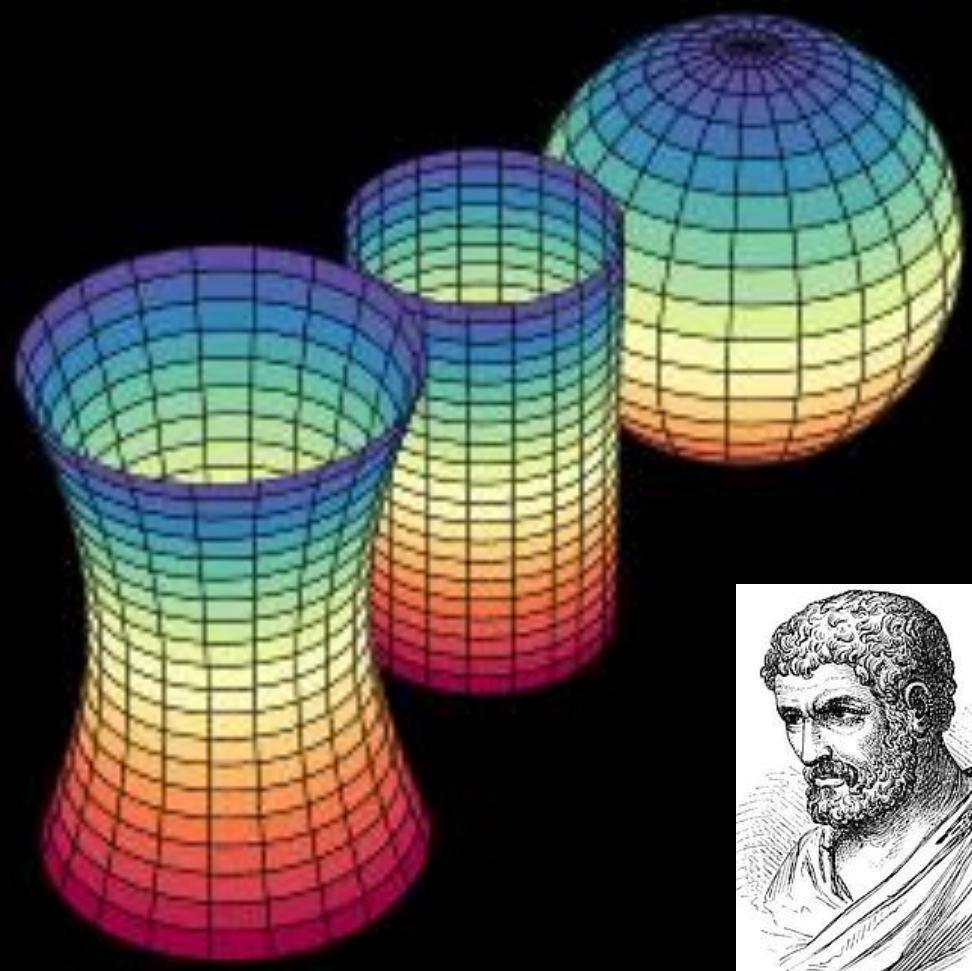
Die Gaußsche Krümmung ist das Produkt der beiden Haupt-krümmungen am Punkt P

Gaußsche Krümmung Torus



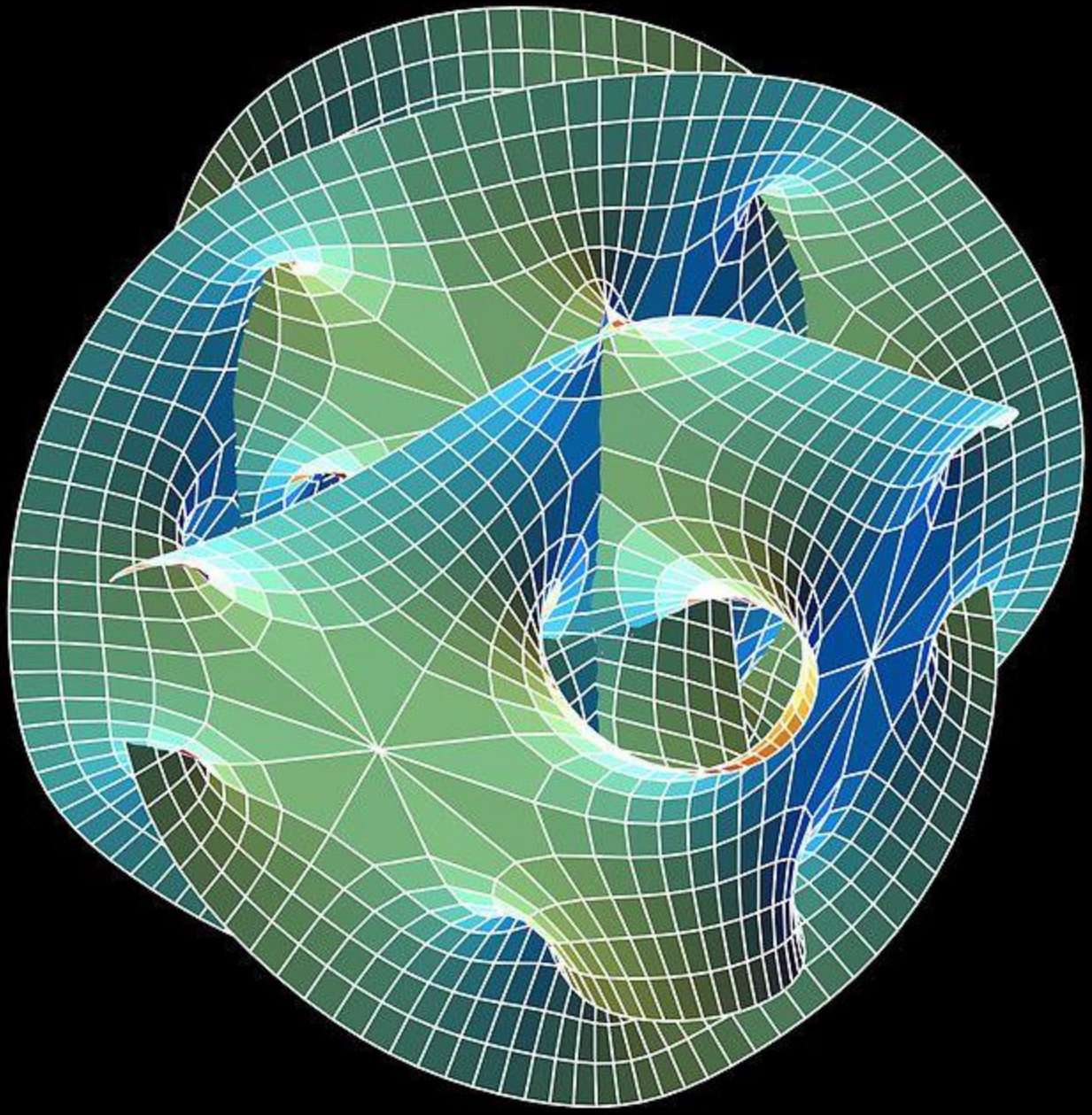


Ist die Gaußsche Krümmung überall gleich Null: Euklidische Geometrie
Ist die Gaußsche Krümmung überall positiv: Sphärische oder Riemannsche Geometrie
Ist die Gaußsche Krümmung überall negativ: Hyperbolische oder Lobatschewskische Geometrie



Welche Geometrie hat der kosmische Raum (Universum)?

→ ist eine physikalische Frage!



Isaak Newton (1687):

Raum und Zeit existieren unabhängig voneinander. Der Raum stellt dabei das „Behältnis“ dar, in dem das Weltgeschehen stattfindet und die Zeit ist dessen Ordnungsfaktor.

1. Der **absolute Raum** ist das postulierte Konzept eines physikalischen Raumes, der sowohl vom Beobachter als auch von den darin enthaltenen Objekten und den darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängig ist.
2. Die **absolute**, wahre und mathematische **Zeit** verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand. Sie wird mit dem Namen „**Dauer**“ belegt...

3. Ein Körper, auf dem keine **Kräfte** wirken, bewegt sich in einem **Inertialsystem geradlinig gleichförmig**

4. Die **Abweichung der Bewegung eines Körpers von geradlinig gleichförmiger Bewegung** ist proportional (in einem Inertialsystem) einer auf dem Körper wirkenden **Kraft**

5. Actio = Reactio: Die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern erfolgt durch **gegengleiche Kräfte**

Newtonsche absolute Raum und Zeit

Mathematisches Modell

a) Raum: 3 Bewegungsfreiheitsgrade, 3 Rotationsfreiheitsgrade, Kontinuum, in alle Richtungen unendlich ausgedehnt, euklidische Metrik, völlig unabhängig von dem physikalischen Geschehen in ihm (d. h. er ist nichts anderes als eine Art „Behältnis“)

b) Zeit: Die Zeit ist unendlich ausgedehnt und nur von einer Dimension. Kontinuum, Damit sind Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eindeutig festgelegt. Alle Zeitpunkte sind aus physikalischer Sicht gleichberechtigt, d. h. der „Zeitpfeil“ existiert in der klassische Mechanik nicht (jeder mechanische Vorgang in der Zeit ist auch in der Zeit umkehrbar).

Zwischen absoluten Raum und absoluter Zeit gibt es keinen Zusammenhang. Sie „existieren“ quasi unabhängig voneinander.

Anmerkungen zum Newtonschen Axiomensystem

Das erste Newtonsche Axiom scheint ein Spezialfall des zweiten Axioms zu sein, nämlich der Fall, wo keine Kraft wirkt: Beschleunigung 0 → Bewegung geradlinig gleichförmig

→ aber das ist nicht die Intention des ersten Axioms. Es definiert vielmehr, was **geradlinig und gleichförmig** bedeutet. Eine Bewegung ohne Krafteinwirkung identifiziert „Geraden“ als Bahnkurven.

(Puck auf Eiskugel, Sand im Kosmos - Trajektorie)

→ **Problem:** Aufgrund der Omnipräsenz der Gravitation gibt es prinzipiell keine Bewegungen ohne Krafteinwirkung

(nur zwei Körper im Kosmos)

→ **Lösung des Problems:** Man betrachte die Gravitation NICHT als Kraft, sondern als „Krümmung“ der **Newtonschen RaumZeit**

→ „geradlinig gleichförmig“ im Raum wird zu „geradlinig“ in der RaumZeit

Die Rolle einer Theorie in der „Welterklärung“

Eine Theorie ist im Allgemeinen eine durch Denken gewonnene Erkenntnis im Gegensatz zum durch Erfahrung gewonnenen Wissen.

In der Wissenschaft bezeichnet Theorie abweichend ein System wissenschaftlich begründeter Aussagen, das dazu dient, Ausschnitte der Realität und die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu erklären und Prognosen über die Zukunft zu erstellen.

Eine Theorie liefert Begriffe sowie den Bezugsrahmen, in dem man Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt einordnet und dessen Beziehungen untereinander sichtbar macht. Die Qualität einer Theorie wird daran gemessen, wie exakt sie Objekte und Prozesse der Erfahrungswelt zu widerspiegeln vermag sowie in ihrer Vorhersagekraft in Bezug auf noch unbekannte Objekte und Prozesse (die dann wirklich empirisch in Experimenten nachgewiesen werden oder nicht).

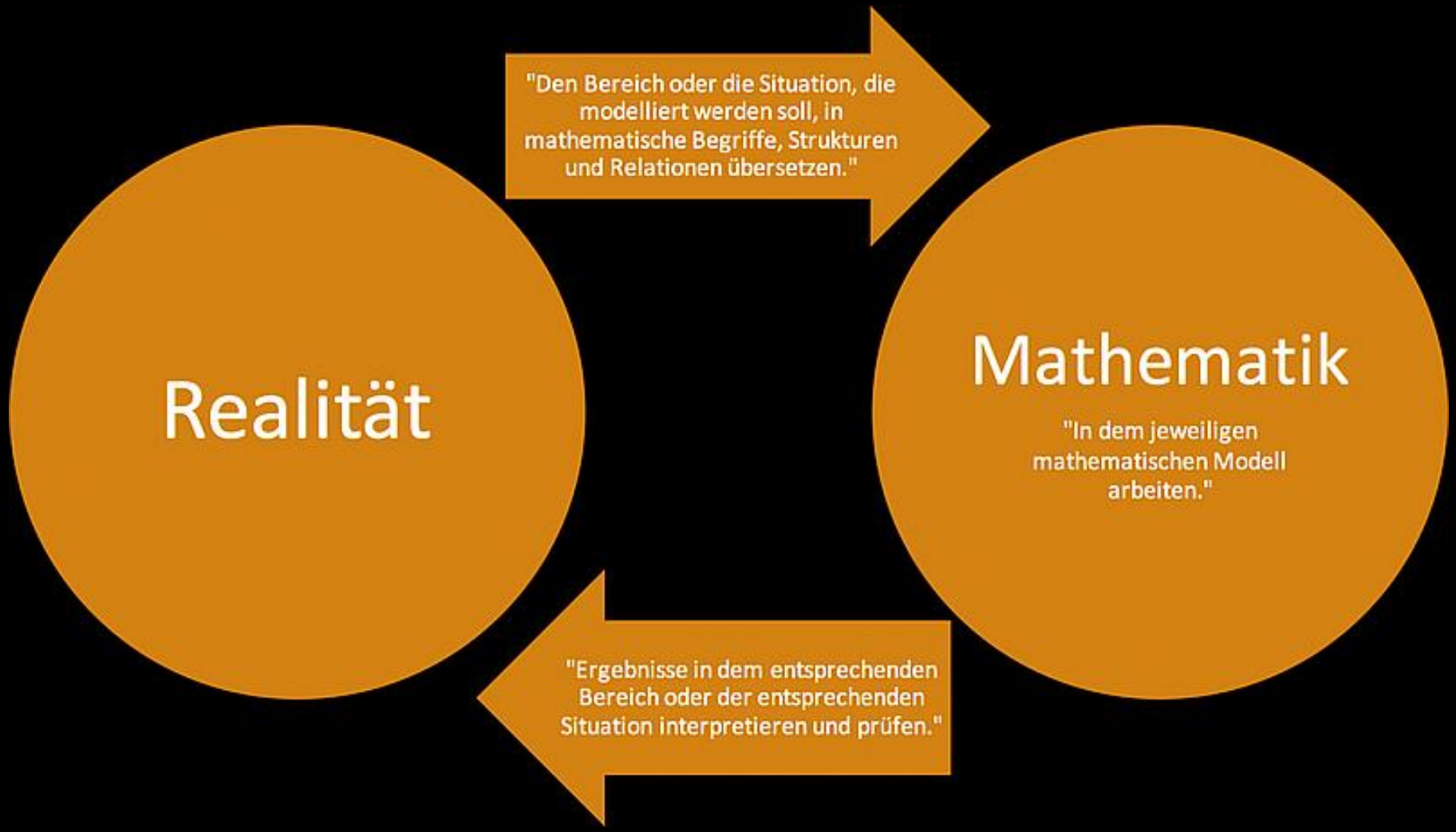
Da die Alltagssprache zu unpräzise für derartige Aufgaben ist, nutzt man die Mathematik, um physikalische Objekte und Prozesse zu beschreiben.

Eine physikalische Theorie bedient sich mathematischer Modelle, um die Komplexität der realen Welt begrifflich handhabbar zu machen:

Was ist ein „Modell“ ?

- Im Prinzip ist jede individuelle oder gesellschaftlich Wahrnehmung eine Theorie der Realität
- Religionen sind auch Modelle der Welt (= "Kosmologien")
- Wissenschaftliche Modelle kontrollieren ihre Gültigkeit scharf an der Realität (Experimente)
- Mindestanforderung an ein Modell: **Ein Modell muss die Realität quantitativ und qualitativ mit mindestens ausreichender Genauigkeit abbilden und eine annehmbare Prediktionsfähigkeit in der Zukunft haben**
- Maximalforderung: In der Theoretischen Physik wird sogar eine quantitative und qualitative Identität zwischen Modell und Realität gefordert.

In der physikalischen Theoriebildung wird stillschweigend davon ausgegangen, dass sich die „Realität“, wie sie sich der empirischen Forschung offenbart, von mathematischer Struktur ist und sich deshalb mit mathematischen Objekten abbilden lässt.


"Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen."
Realität
Mathematik
"In dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten."
"Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen."

Mathematischer Raumbegriff – Physikalischer Raum

Mathematische Räume sind abstrakte Räume (d. h. Mengen mathematischer Objekte mit einer Struktur), die eine Topologie und eine metrische Struktur aufweisen.

Beispiele: Topologische Räume, metrische Räume, Vektorräume, spezielle Funktionenräume etc. pp.

Der **Perzeptible oder Wahrnehmungsraum** ist der den Sinnen zugängliche Erfahrungsraum, der quasi als „Behältnis“ wahrgenommen wird. Er ist dreidimensional und euklidisch.

Der **physikalische Ortsraum** stellt ein eindeutiges Bezugskonstrukt dar, dessen Topologie und Geometrie durch die Erfahrung zu ermitteln ist. In der modernen Physik bildet er zusammen mit der Zeit die sogenannte „**Raumzeit**“. Ihre globale topologische und metrische Struktur ist noch weitgehend unbekannt. Lokal ist sie jedoch quasi-euklidisch und mit dem Wahrnehmungsraum identisch.

Der **objektive Raum** ist der Raum, in dem die „Realität“ unabhängig von einem Beobachter stattfindet.

Mathematischer Raum

Perzeptibler Raum (Wahrnehmungsraum)

Konzeptioneller Raum (physikalischer Raum)

Objektiver Raum (real)

$$\mathbf{R}^3$$

Mathematisches Modell:

Kontinuierliche Punktmenge mit aufgeprägter topologischer Struktur und Metrik

Zusammenfassung „Raum“

- Ein Raum ist eine Mannigfaltigkeit von diskreten oder kontinuierlichen Raumpunkten
- Ein „Raum“ wird erst „messbar“ (d.h. Raumpunkte identifizierbar), wenn in ihm eine Metrik (in Form eines invarianten Abstandes ds) definiert ist
- Die Metrik bestimmt die „Geometrie“ des Raumes, d.h. z.B. welches lokales oder globales Krümmungsmaß er besitzt
- Die Anzahl der voneinander unabhängigen „Richtungen“ im Raum nennt man seine Dimensionen (= Anzahl der Koordinatenachsen)
- Mathematische Räume können eine beliebige Dimension n besitzen
- Dimensionen können „verborgen“ sein (Kaluza-Klein-Räume)
- Die Zusammmenhangsverhältnisse und das Verhalten von Räumen unter stetigen Transformationen wird durch die Topologie untersucht

Newtonsche Physik:

Raum und Zeit werden als **absolute Bezugssysteme** gedacht. Ihre „Existenz“ erlaubt die Definition einer Dynamik.

Newtonsche Kosmologie

Prämissen

Raum und Zeit sind keine inhärenten Bestandteile der Newtonschen Physik. Sie sind a-priori gegeben und fungieren als „Behältnis“ und Parameter zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen. Sie sind auch keine Bestandteile der axiomatischen Begründung der Newtonschen Mechanik. Ihre Existenz ergibt sich als Denknotwendigkeit (Kant):

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.

Die absolute, wahre oder mathematische Zeit verfließt an sich und nach ihrer Natur ohne Beziehung auf irgend ein äußeres Ding gleichmäßig.

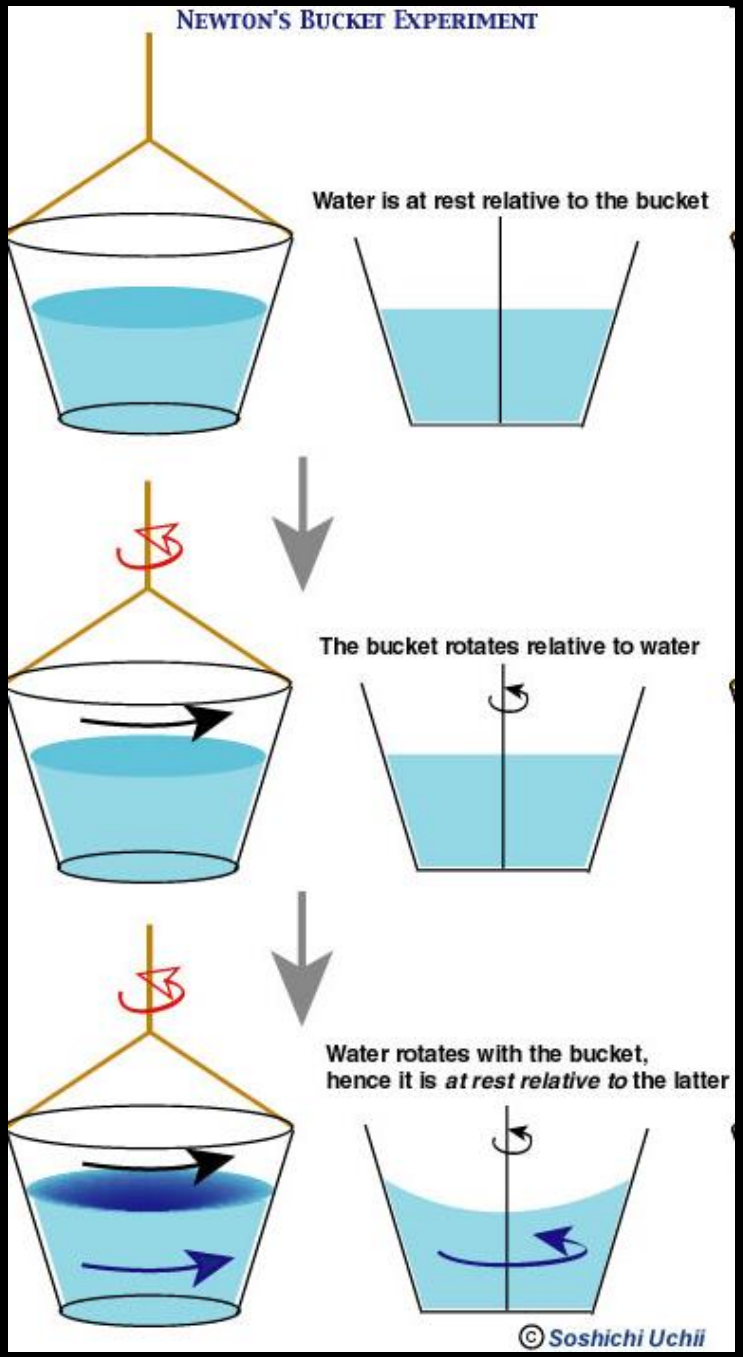
Eigenschaften des absoluten Raums:

- er existiert unabhängig von den materiellen Körpern der Welt
- er definiert ein absolut ruhendes Koordinatensystem mit euklidischer Metrik und drei Dimensionen
- alle Bezugssysteme, die sich gleichförmig in Bezug auf den absoluten Raum bewegen, sind kräftefrei (Galileisches Relativitätsprinzip)
- Beschleunigungen erfolgen relativ zum absoluten Raum → Trägheitskräfte

Problem: (Ernst Mach, 1838-1916)

Sind „Raumpunkte“ ohne materielle Körper, die ein Koordinatensystem aufspannen, identifizierbar? (diese Frage wurde bereits von Leibnitz erörtert)

Wenn nein, wie kann dann eine Beschleunigung gegenüber dem „absoluten Raum“ Trägheitskräfte hervorrufen?



Newton's Eimerexperiment

- Beweis für den absoluten Raum (?)

- E. Mach: „Beschleunigung gegenüber dem Sternhimmel"

- Keine Materie als Bezugspunkte
- Keine Beschleunigung
- keine Trägheitskräfte …

Das „Eimerproblem" ist bis heute noch nicht gelöst und Gegenstand weltweiter Forschung

→ **Machsches Prinzip**

Kritik des absoluten Raumes: Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716)

Existiert der absolute Raum als Entität, d.h. als „Hintergrundsubstanz“ oder spannen erst die Relationen zwischen materiellen Körpern den „Raum“ auf?

Fragen über Fragen …

- Wo im „Raum“ befindet sich das Universum?
- Würde man es merken, wenn man das Universum z.B. 3 Meter nach Rechts im Raum verschiebt?
- Wenn man grundsätzlich nicht im Stande ist, den „Raum“ oder Veränderungen im „Raum“ zu entdecken, warum sollte man ihm „Existenz“ zubilligen?
- Verschwindet der absolute Raum, wenn alle materiellen Objekte aus ihm entfernt werden?

Newton: Der absolute Raum hat Konsequenzen
-> er erlaubt, **Bewegungsänderungen** relativ zu ihm zu messen

Frage: Gibt es Alternativen zu dieser Auffassung?

1. Newton betrachtet nur die relative Bewegung des Wassers in Bezug auf den Eimer

   → Relativgeschwindigkeit = 0
   → Oberfläche konkav
   → Rotation gegenüber dem absoluten Raum

2. Wieso liefert der absolute Raum nur einen Bezugspunkt gegenüber Beschleunigungen, jedoch nicht für gleichförmige Bewegungen?

Ernst Mach: Es gibt neben dem hypothetischen absoluten Raum auch noch natürliche Bezugspunkte, anhand der sich die Bewegung des Wassers im Eimer definieren lässt

→ der kosmische Raum mit all seinen Sternen und Galaxien

Mach'sche Hypothese:

Wenn alle Himmelskörper aus dem kosmischen Raum entfernt werden, gibt es keine z.B. durch Rotation hervorgerufenen Beschleunigungen mehr.

→ die träge Masse verschwindet

Machsches Prinzip:

Die träge Masse eines Körpers entsteht durch die Wechselwirkung dieses Körpers mit allen anderen Körpern im Weltall.

Beobachtung:

Schwere Masse und träge Masse sind streng proportional zueinander

→ alle Körper fallen gleich schnell im Schwerefeld

Albert Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie

Newtonsche Kosmologie vor 1905 …

Die „Kosmologie“ war im Abendland maßgeblich theologisch geprägt. In der Vulgärtheologie war die Dreiteilung „Hölle“, „Erde“ und „Himmel“ die Grundlage der Weltsicht der abrahamitischen Religionen. Dante‘s *„**La divina commedia“*** von 1320 war eine gute Zusammenfassung dieser Weltsicht.

Mit der Entwicklung der modernen Naturwissenschaften (Descartes, Galilei, Newton etc.) begann man ein von Religionen unabhängiges Weltbild anhand allgemeiner philosophischer Prinzipien und von Beobachtungen zu entwickeln.

Zitat Pierre Simon de Laplace: *„Traité de Mécanique Céleste“*

Napoleon: *"Wo ist denn Gott in Ihrem Weltbild?„*
Laplace: *"Diese Hypothese, Sire, benötige ich nicht."*

Die Astronomie im 17. und 18. Jahrhundert war im Grunde eine Astronomie des Sonnensystems. Die Vermessung des Sternhimmels diente im Wesentlichen dazu, Positionsbestimmungen von Planeten, Kometen und Planetoiden mit hoher Genauigkeit zu ermöglichen, um deren Bahnen berechnen zu können.

Grundlagen und Prämissen einer Kosmologie, die auf der Grundlage der Newtonschen Mechanik beruht

Modellannahmen:

Früher: absoluter Raum
Heute: topologischer Raum + Metrik

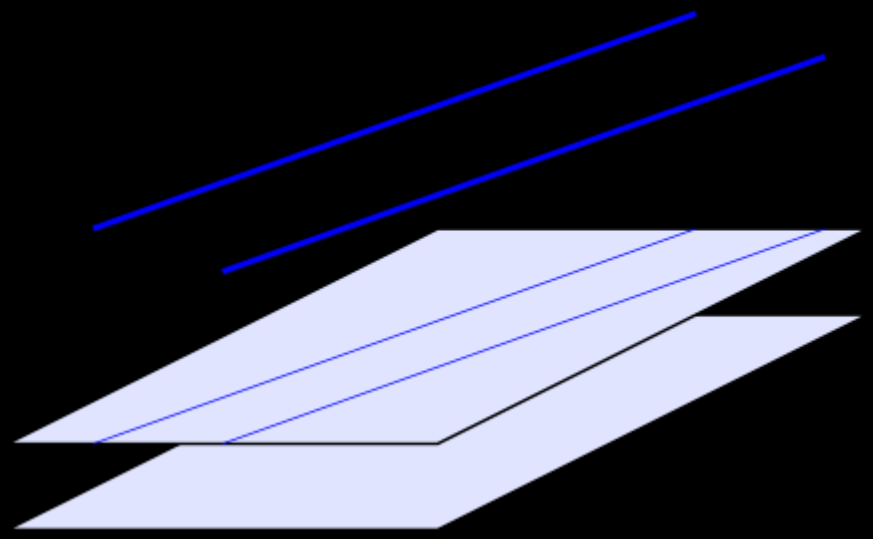
Früher: absolute Zeit
Heute: metrische Zeit (ohne Zeitpfeil)

Die Newtonsche Mechanik lässt sich modern so darstellen, dass man sie auf der Grundlage verschiedener Topologien und darauf definierter Metriken formulieren kann. Die jeweiligen Vorhersagen lassen sich dann empirisch mit astronomischen Beobachtungen vergleichen und damit falsifizieren.

1. Topologien, die mit einer euklidischen Metrik vereinbar sind:

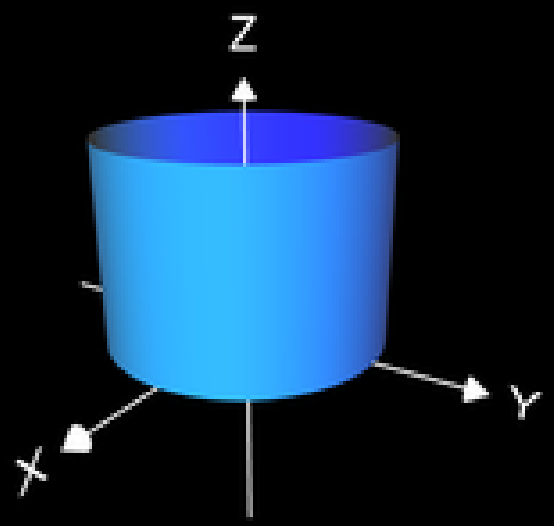
<u>Beispiel im R^2:</u>

in x und y unendlich ausgedehnte Ebene, in der das Euklidische Parallelenaxiom gilt.



homogen + isotrop

Fläche eines in eine Richtung unendlich ausgedehnten Zylinders.



homogen

Da der physikalische Raum dreidimensional ist, müssen in der theoretischen Beschreibung natürlich die dreidimensionalen Analoga von „unendlich ausgedehnter Ebene“ oder „unendlich ausgedehnter Zylinder“ zum Einsatz kommen. Beide weisen eine euklidische Metrik auf.

Der Euklidische Raum als Modell des „Kosmischen Raumes“

1. Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen.
2. Man kann eine Strecke kontinuierlich zu einem Strahl verlängern.
3. Um jeden Punkt kann man einen Kreis mit beliebigem Radius zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. (Parallelenaxiom): Wenn eine Strecke zwei andere Strecken derart schneidet, so dass die beiden inneren Schnittwinkel auf der einen Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, dann schneiden sich die beiden Strecken, wenn sie weit genug verlängert werden, auf der Seite, auf der die Schnittwinkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

Grundannahme:

Der kosmische Raum stellt eine dreidimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit dar, die in alle Raumrichtungen unendlich weit ausgedehnt sowie homogen und isotrop ist .

Kosmologisches Prinzip

- Das Weltall ist homogen – d. h., es stellt sich einem Beobachter unabhängig von seinem Standpunkt im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Homogenität**, auch "Kopernikanisches Prinzip" genannt).
- Das Weltall ist isotrop – d. h., es stellt sich dem Beobachter unabhängig von der Beobachtungsrichtung im Raum immer gleich dar (**Prinzip der Isotropie**).

Das Prinzip der Homogenität impliziert, dass die Sterne (heute würde man sagen, Galaxien) gleichmäßig, d. h. überall mit der gleichen räumlichen Dichte, im unendlichen Universum verteilt sind.

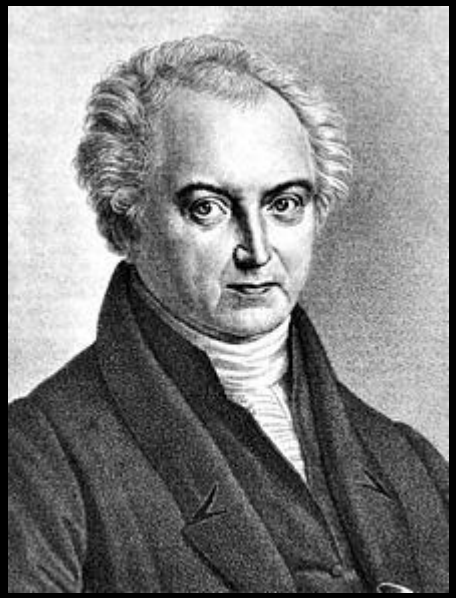
Symmetrieprinzipien und mechanische Erhaltungssätze

Homogenität des Raumes impliziert Impulserhaltung
Isotropie des Raumes impliziert Drehimpulserhaltung
Homogenität der Zeit impliziert Energieerhaltung

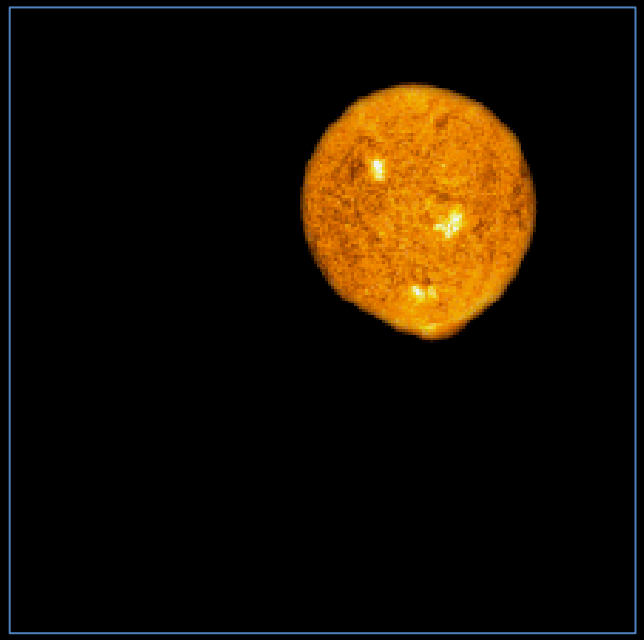
Noether-Theorem

„Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander, oder in Milchstrassen-Systeme vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und da müsste der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden.“

Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758 -1840)



Olberssches Paradoxon



- Sterne haben eine endliche Ausdehnung und Leuchtkraft
- Anzahl der Sterne nimmt mit R^3 zu
- Statisches Universum

Das Olberssche Paradoxon ist ein ernstzunehmender Test für kosmologische Theorien

Hermann Bondi, 1954

Stabilität eines unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universums

Hugo von Seeliger (1849-1924)

Aufgrund der gravitativen Anziehung führt jede zufällig erfolgte Massenkonzentration zu einen Gravitationskollaps. Ein unendlich ausgedehntes und homogen mit Sternen erfülltes Universum ist per se instabil.

Lösung: Man muss die Materie im Kosmos hierarchisch verteilen

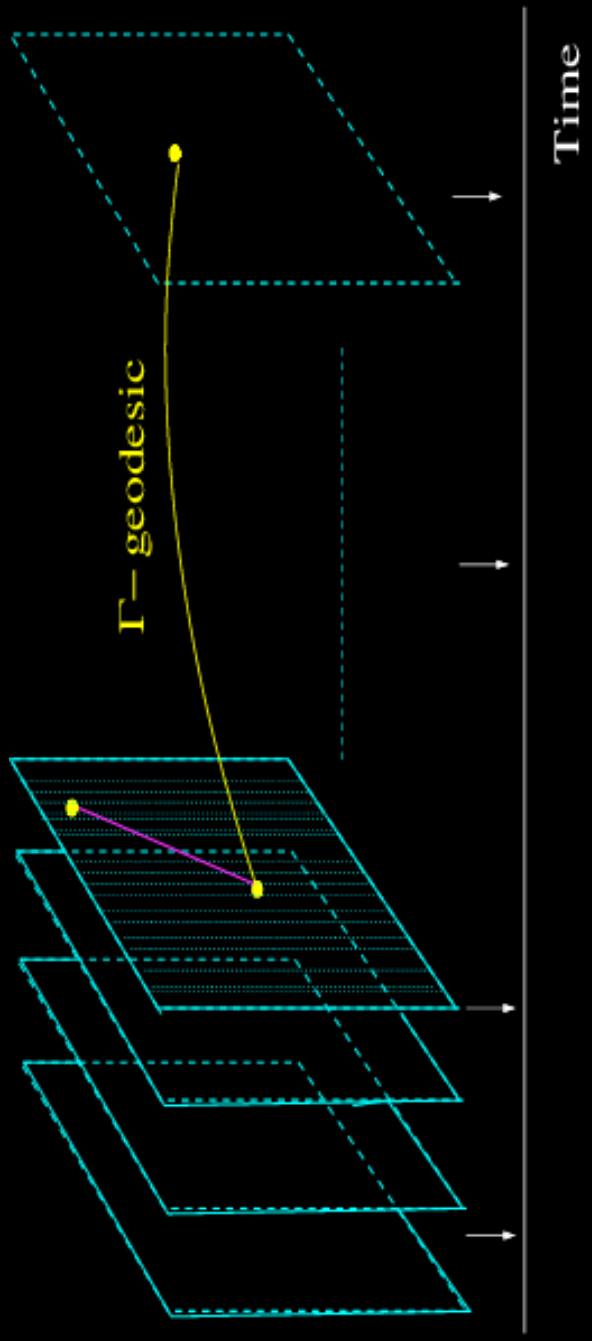
Hierarchisches Weltmodell von Carl Charlier (1908 und 1922)
Fraktales Weltmodell nach Benoit Mandelbrot (1977)

Die Newtonsche Mechanik ist eine deterministische Theorie

Da die Bewegungsgleichungen deterministisch und reversibel sind, ist jedes Ereignis in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft vorbestimmt:

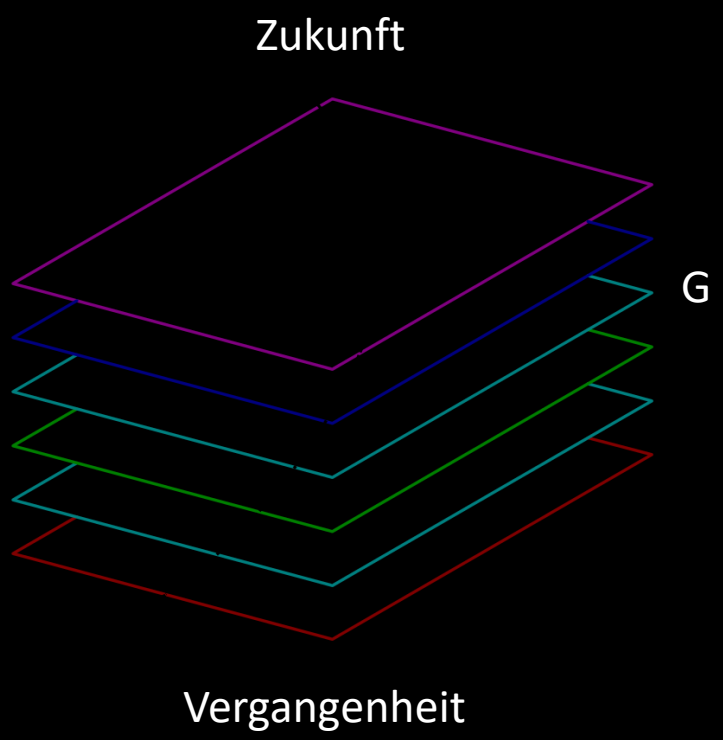
„Laplace'scher Dämon"

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen."



Newtonsches Blockuniversum

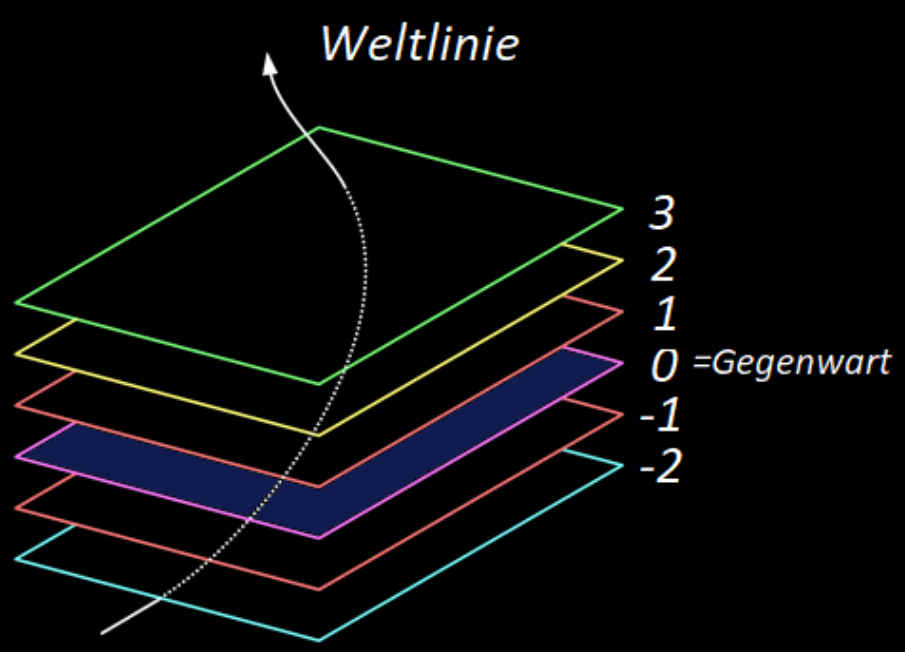
Man kann sich das Newton‘sche Universum als eine Art „Daumenkino“ vorstellen, bei der jede Karte einen Augenblickszustand der Welt darstellt. Dabei ist der „Augenblick“ „Gegenwart“ derart ausgezeichnet, dass alle Karten (= „Zeitschnitte“) darunter die „Vergangenheit“ und alle Karten darüber die „Zukunft“ darstellt. Dabei „bewegt“ sich der Augenblick „Gegenwart“ gleichmäßig Zeitschnitt um Zeitschnitt in Richtung Zukunft.

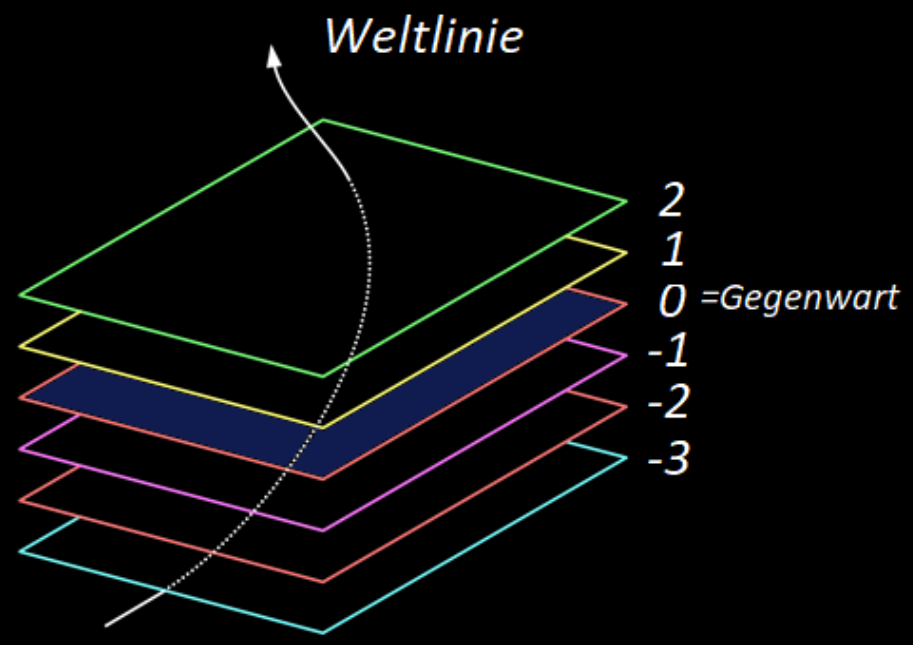


Im Newtonschen Blockuniversum ist die Zukunft vollständig determiniert (Stichwort: Laplacescher Geist) - d. h. alles, was passiert, ist vorbestimmt

Im Newtonschen Blockuniversum ist eine „Zeit“ auf der Zeitachse ausgezeichnet . Es ist der „Augenblick“. Alle Ereignisse (x,y,t), die auf der Augenblicks-Zeitscheibe liegen, sind gleichzeitig.

Die „Bewegung“ eines Körpers durch das Blockuniversum ist eine Folge von Ereignissen, die von Zeitscheibe zu Zeitscheibe wandern → Weltlinie





Newtonsches Blockuniversum

- Unendlich ausgedehnter euklidischer Raum mit homogener und isotroper Materieverteilung („Kosmologisches Prinzip“)
- Raum und Zeit werden als kontinuierlich angesehen (es gibt keine kleinste Raum- und Zeitintervalle)
- Weltlinien von gleichmäßig gleichförmig bewegten Körper sind Geraden im Newtonschen Blockuniversum
- Weltlinien von beschleunigt bewegten Körpern sind stetige, gekrümmte Kurven im Newtonschen Blockuniversum
- Jede „gerade“ Weltlinie ist Repräsentant eines Inertialsystems. Sie kennzeichnen kräftefreie Bewegungen. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt und lassen sich über die Galilei-Transformationen ineinander überführen.
- Es gibt in der Newtonschen Physik keine maximale Grenzgeschwindigkeit (instantane Ausbreitung von Signalen)

Kosmische Expansion

Um 1915 stellt Vesto Slipher (1875-1969) am Lowell Observatory in Arizona fest, dass bei 11 der von ihm untersuchten 15 Galaxien sogenannte "spektrale Rotverschiebungen" zu verzeichnen waren. 1929 entdeckte dann Edwin Hubble (1889-1953), dass es einen Zusammenhang zwischen der anhand von Cepheiden ermittelten Entfernung von Galaxien und deren Rotverschiebung gibt und zwar in dem Sinn, dass je größer die Rotverschiebung, desto größer die Entfernung der entsprechenden Galaxie.

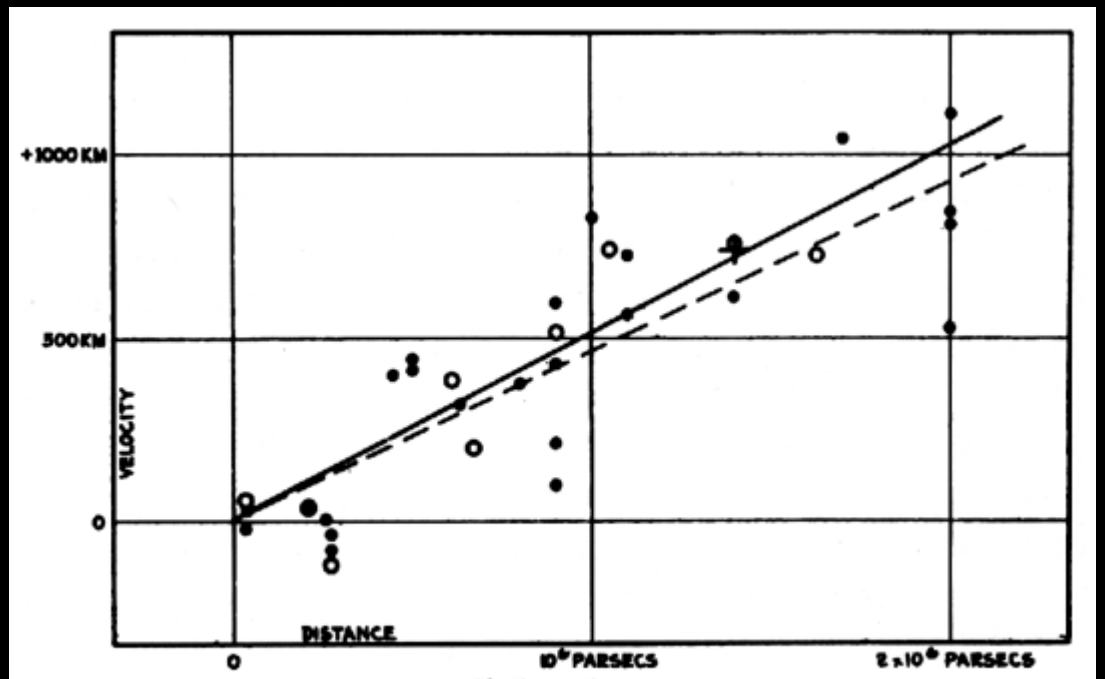
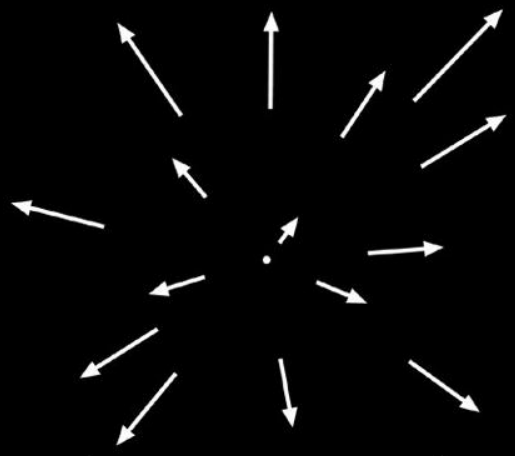


FIGURE 1

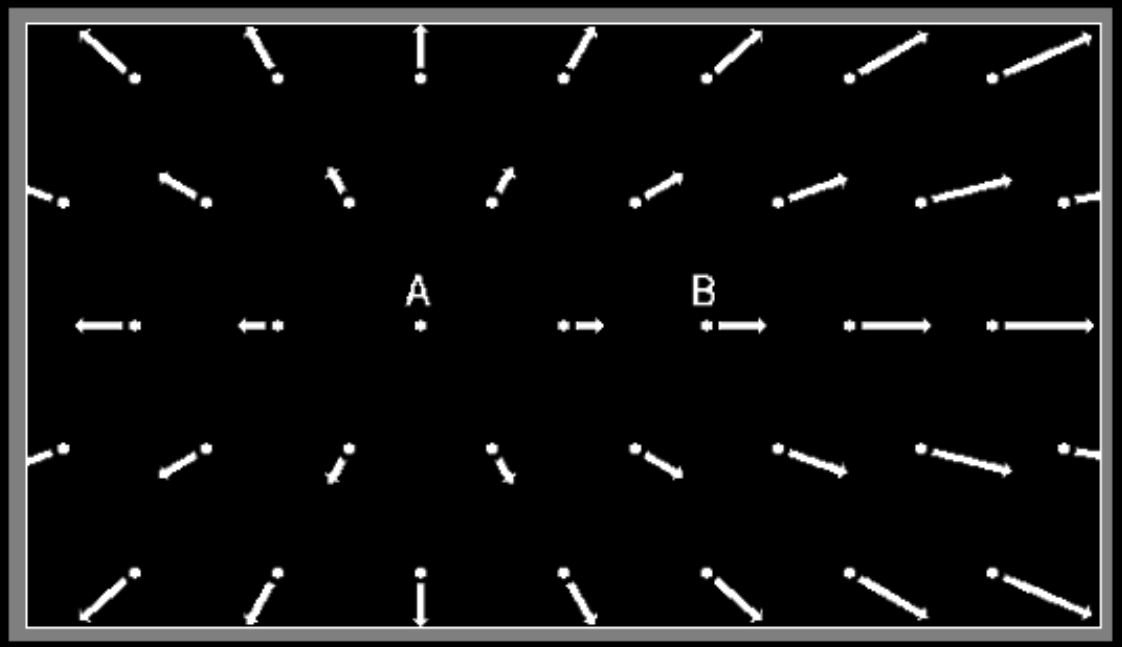
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.



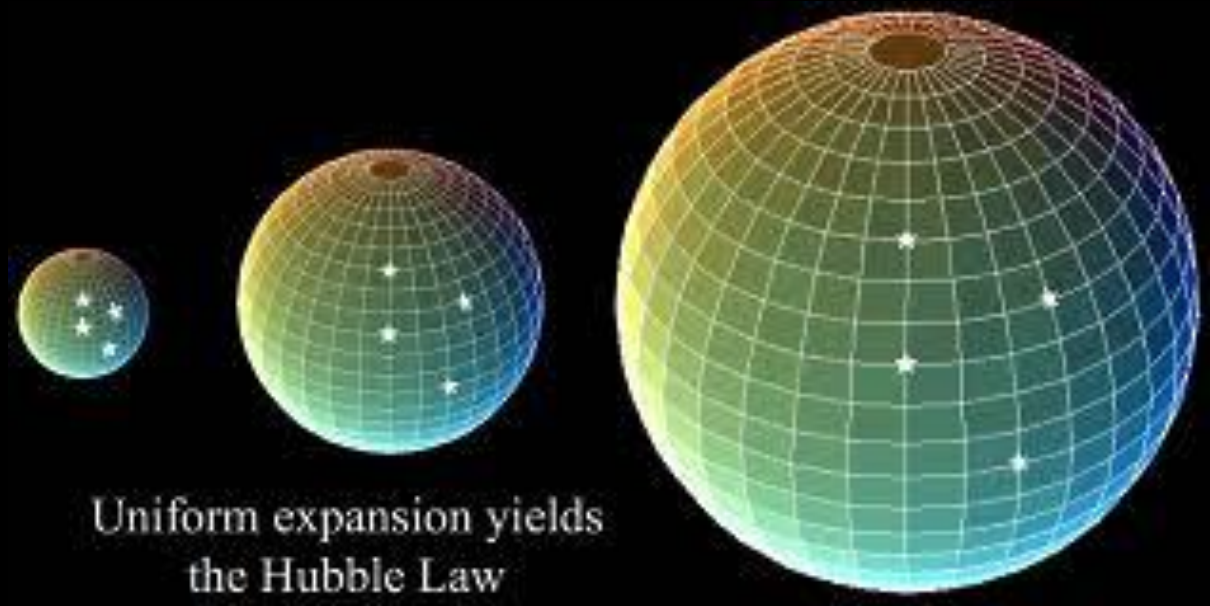
$$V = H_0 d$$

Hubble-Gesetz

Hubble-Fluss



Euklidische Ebene



Kugeloberfläche

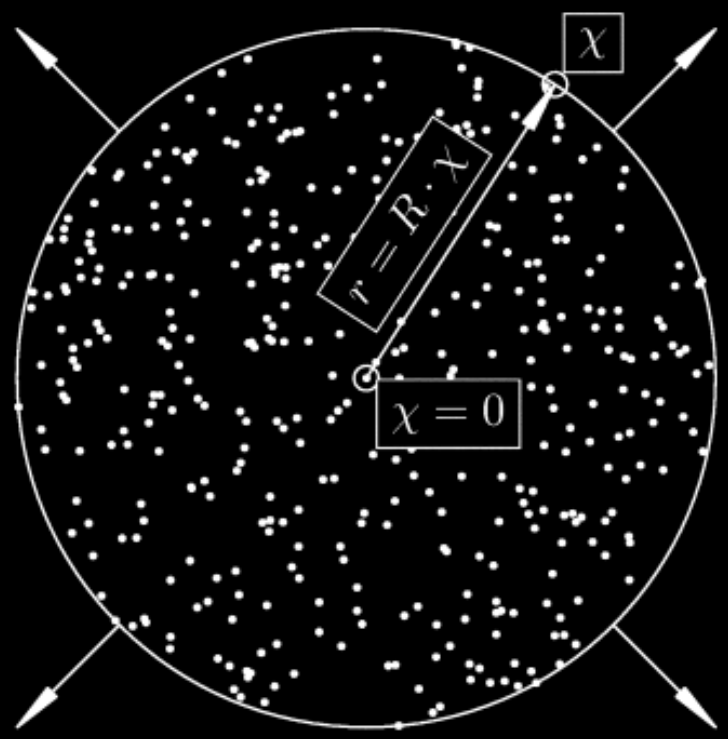
Lässt sich die kosmische Expansion im Rahmen der Newtonschen Mechanik beschreiben?

Von einer gedachten Kugel umschlossene Galaxien in einem unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen Universum

Einführung eines Skalenfaktors R(t), der alle Entfernungen mit der Zeit anwachsen (Expansion) oder abnehmen (Kontraktion) lässt. Ein Skalenfaktor R(t)=1 beschreibt ein statisches Universum

2d – Modell (R^2, unendlich ausgedehnte Ebene)

Die endliche Lichtgeschwindigkeit impliziert (unter der Annahme eines endlichen Weltalters) einen „Horizont“, der den (endlichen) beobachtbaren Teil des Universums vom unendlichen Universum trennt.



Modell:

Man betrachtet ein expandierendes Volumen, welches mit einem „Galaxiengas“ gefüllt ist.

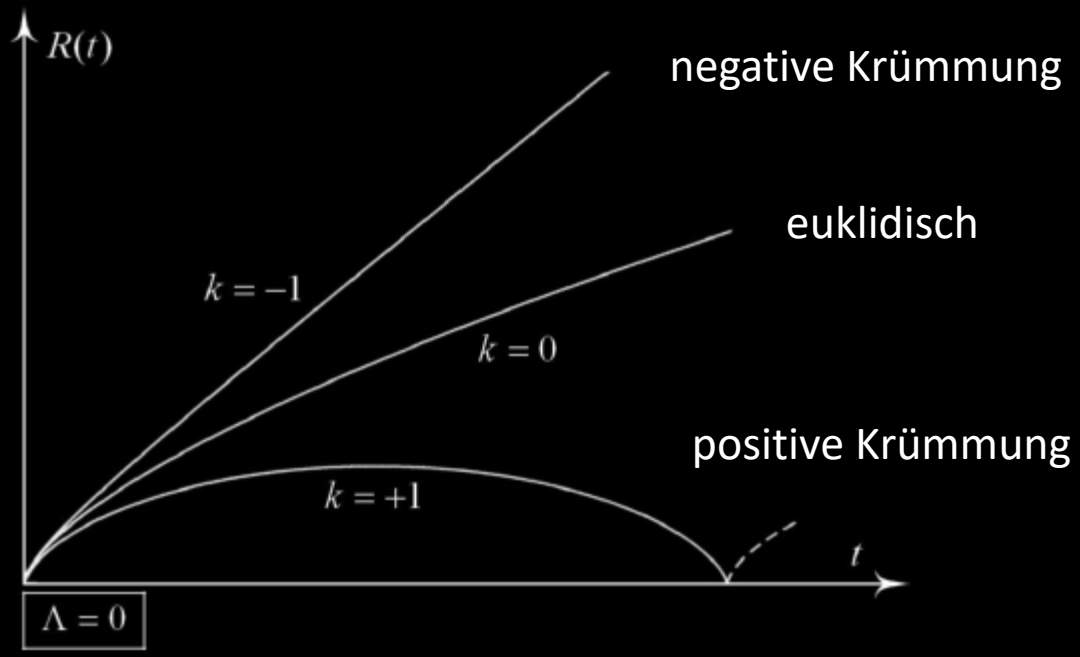
→ vergrößert man das Volumen, dann nimmt die Dichte ab. Da dabei die „innere Energie“ des Galaxiengases in potentielle Gravitationsenergie transformiert wird, bleibt dabei die Gesamtenergie erhalten (adiabatische Expansion).

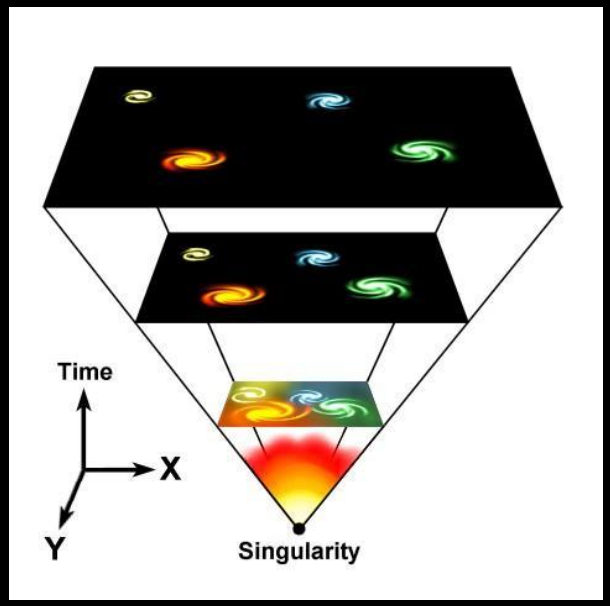
Mathematische Modellierung führt zu den **Friedman-Gleichungen** (Edward Milne, 1934)

Friedmann-Lemaître-Gleichungen

Die **Friedmann-Gleichungen** stellen eine Vereinfachung der einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) unter der Annahme eines homogenen und isotropen Weltalls (Kosmologisches Prinzip) dar. Aus den Gleichungen lassen sich je nach dem Energiegehalt des Universums Voraussagen über seine **zeitliche Entwicklung** herleiten, d. h. die spezielle Form der Expansion oder Kontraktion.

Alexander Alexandrowitsch Friedmann (1888-1925)





Ein paar Konsequenzen eines unendlich ausgedehnten Universums mit endlichen Weltalter

Beobachtbares Universum = **Hubble-Blase** im unendlich ausgedehnten Universum

Radius ~ 46,6 Milliarden Lichtjahre bei einem Weltalter von 13,8 Milliarden Jahre

→ jeder Punkt im Universum hat seine eigene (expandierende) Hubble-Blase
→ Beobachter können sich nur dann „sehen“, wenn sich ihre Hubble-Blasen überlappen

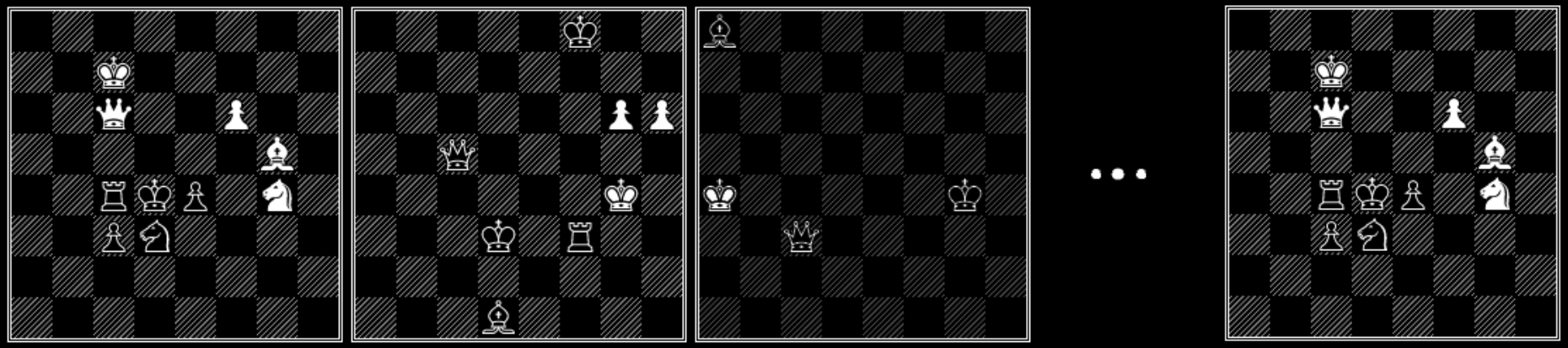
Jede Hubble-Blase kann zu einem gegebenen Zeitpunkt t (gemessen vom Urknall) durch einen eindeutigen Quantenzustand beschrieben werden

- Es gibt eine physikalisch sinnvolle kleinste Länge (Planck-Länge, ~10^-35 m) und eine physikalisch sinnvolle kleinste Zeit (Planck-Zeit, ~ 10^-44 s)

- Mit dieser Länge lässt sich das Volumen der Hubble-Blase durch eine zwar riesengroße, aber endliche Zahl ausdrücken („moderne Sandzahl des Archimedes“ ~10^185 Phasenraumzellen)

- Es gibt dann ca. 10^10^118 Kombinationsmöglichkeiten für die ca. 10^80 Protonen sich auf die 10^185 Phasenraumzellen aufzuteilen (Stichwort Paulisches Ausschließungsprinzip)

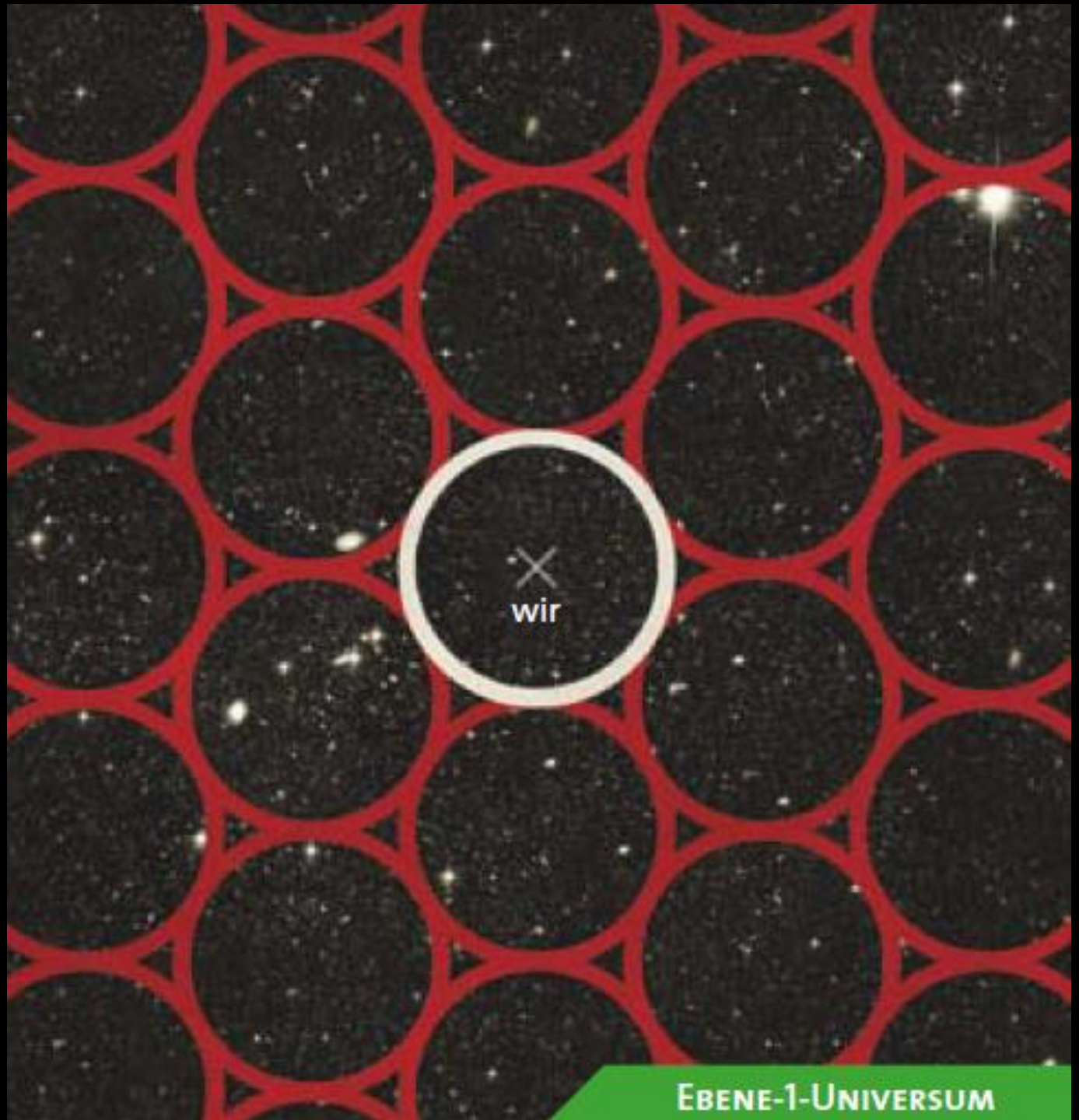
Das euklidische „Schachbrettuniversum“

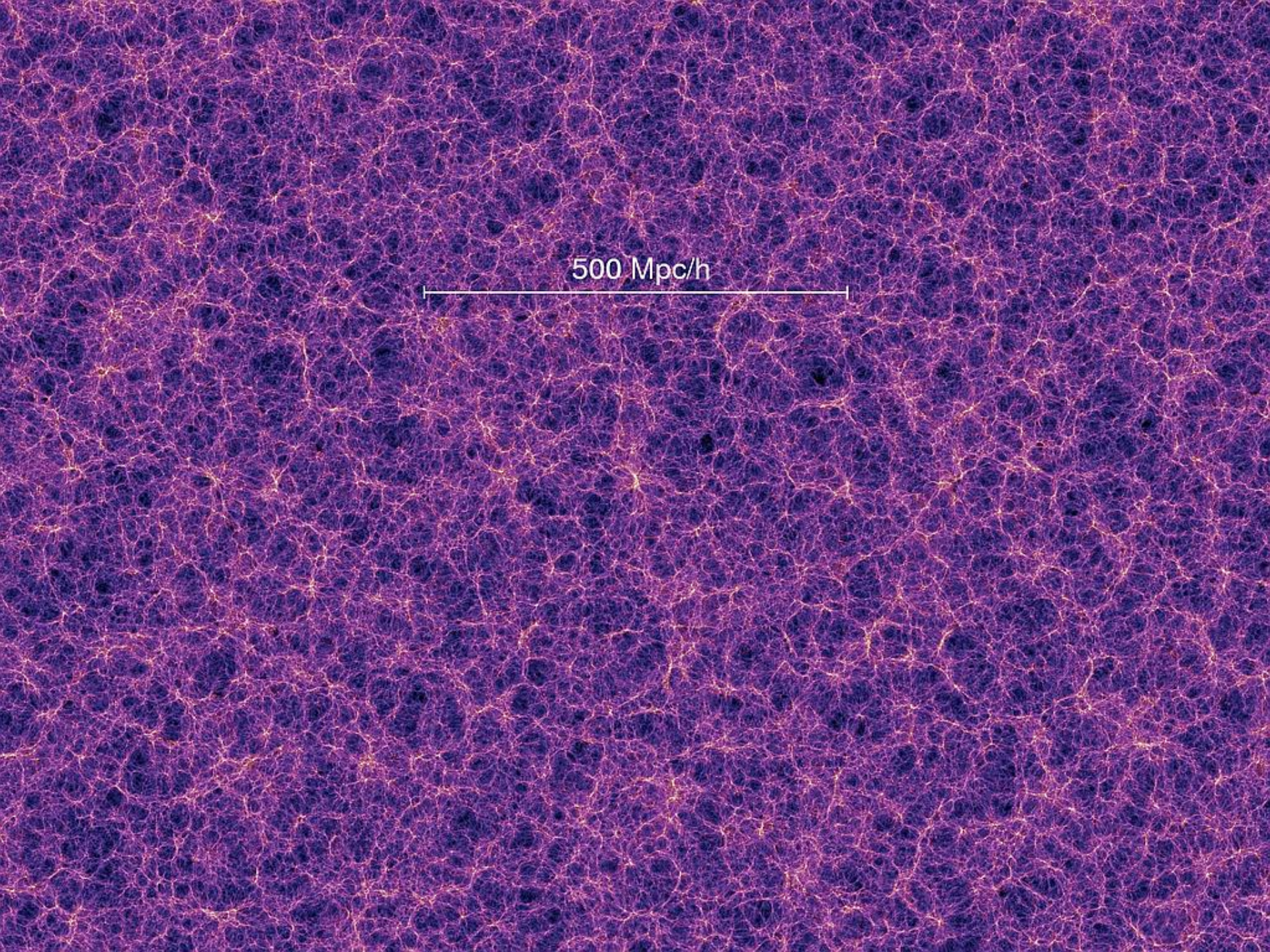


Problemstellung:
Wenn die Figurenverteilung auf jedem Schachbrett zufällig (d. h. „ausgewürfelt“) ist, ab dem wievielten in einer Reihe angeordneten Schachbrett ist dann wieder die Konfiguration des ersten Schachbretts zu erwarten?

Anzahl möglicher legaler Spielstellungen: ~ 10^40
Anzahl möglicher Quantenzustände in der Hubble-Blase: ~ 10^10^118

Resümee: unter ~ 10^10^118 nicht überschnittenen Teilbereichen von der Größe einer Hubble-Blase kann man eine identische Kopie unserer Hubble-Blase erwarten

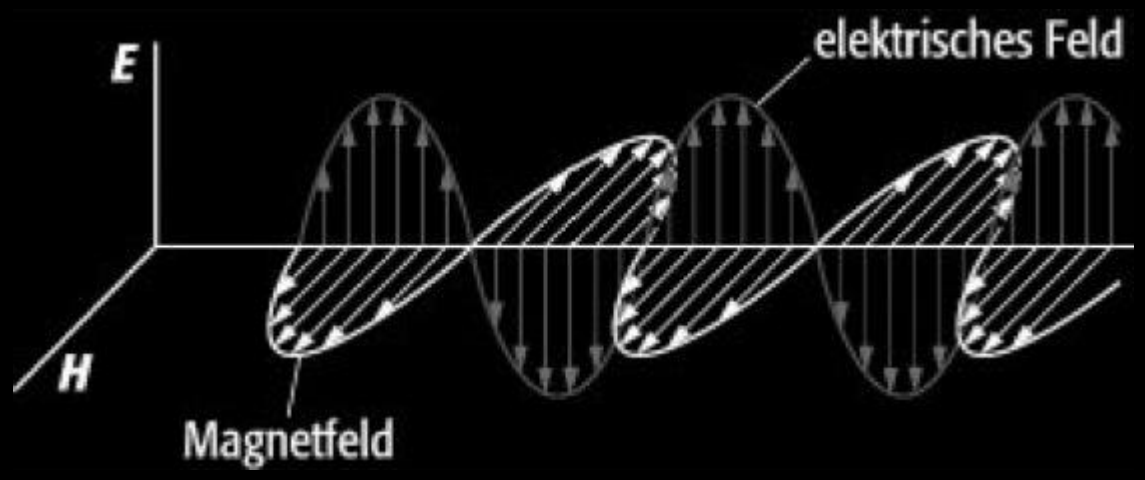

wir
Ebene-1-Universum


500 Mpc/h

Spezielle Relativitätstheorie – die Minkowski-Raum-Zeit

Anfang des 20. Jahrhunderts bestand ein wesentliches Forschungsprogramm im Nachweis des „Trägermediums“ der von James Clerk Maxwell theoretisch vorhergesagten und von Heinrich Hertz 1886 experimentell nachgewiesenen elektromagnetischen Wellen.

→ elektromagnetische Wellen: Transversalwellen (Stichwort: Polarisation)



Äthertheorie

Die Frage nach einem universellen „Trägermedium“ für zuerst optische Erscheinungen (Young, Fresnel), für die Gravitation (Problem Fernwirkung) und später für alle elektromagnetischen Erscheinungen (Maxwell) führte zur Einführung des sogenannten „**Äthers**“, der den gesamten Kosmos gleichmäßig ausfüllen sollte.

- Man konnte sich in Analogie zu Wasserwellen (Transversalwellen) und zu Schallwellen (Longitudinalwellen) die Lichtausbreitung und die damit verbundenen Beugungs- und Interferenzerscheinungen nur im Zusammenhang eines „Trägermediums“ denken.
- Dieses „Trägermedium“ wurde als denknotwendig postuliert und dessen Existenz bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts nicht explizit hinterfragt
- Man versuchte aber im Rahmen der Mechanik die Eigenschaften dieses „Mediums“ zu bestimmen (in Analogie zur Wellenausbreitung in Festkörpern), die es haben muss, wenn sich darin elektromagnetische Wellen ausbreiten sollen

Physikalische Eigenschaften des „Universellen Äthers“

Er füllt den gesamten kosmischen Raum gleichmäßig aus und bildet darin ein absolut ruhendes Bezugssystem

Problem:
Dann müsste sich eine Relativbewegung zu diesem „Äther“ irgendwie messen lassen

Die von James Bradley 1725 entdeckte Aberration des Lichtes kann nur unter der Annahme eines ruhenden Äthers erklärt werden. Da sich aber die Erde um die Sonne bewegt, muss es aber eine relative Geschwindigkeit zwischen Erde und Äther geben (Stichwort: Ätherwind“).

→ teilweise „Mitführung“ des Äthers mit der Materie, um zumindest lokal eine verschwindende Relativbewegung zwischen Materie und Äther postulieren zu können

Die Theorie des ruhenden bzw. mitgeführten Äthers führt zu unauflösbaren Widersprüchen

Mechanische Äthertheorie

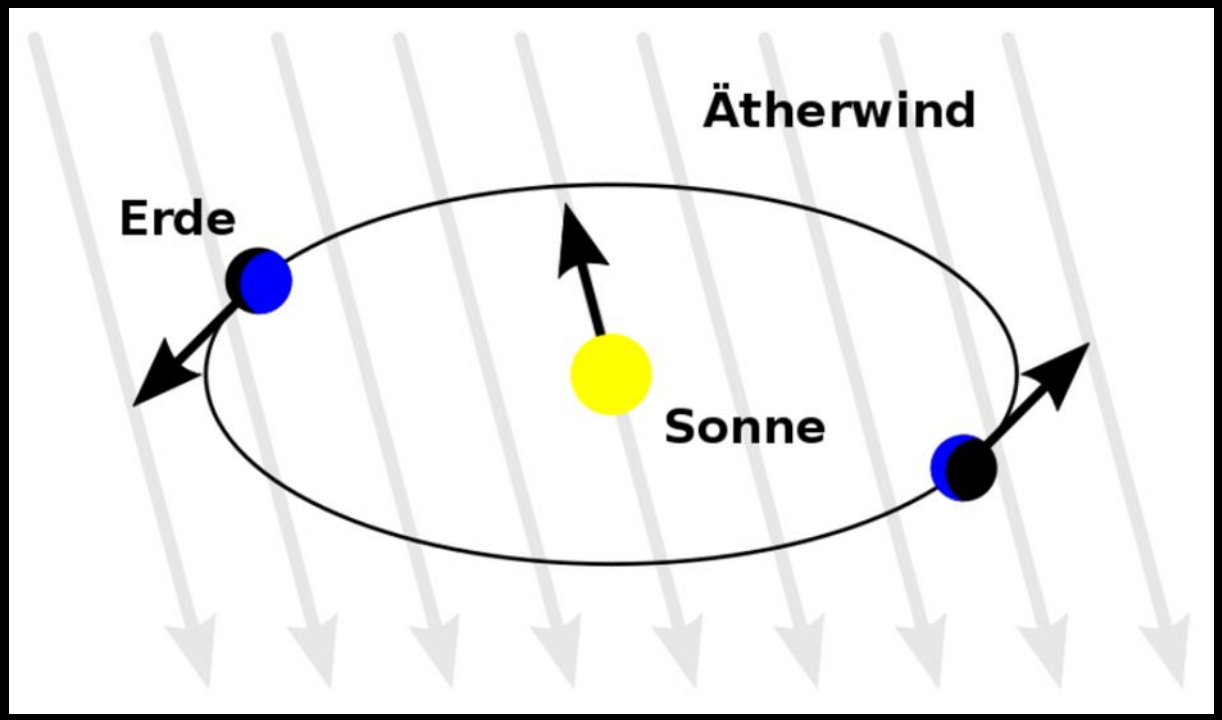
Ein „Medium“ sollte immer einen mechanischen Widerstand („Druck“) aufbauen. Da sich aber die Planeten quasi „reibungsfrei“ um die Sonne bewegen, muss der Äther 150 Milliarden mal weniger dicht sein als die atmosphärische Luft

Der „Äther“ ist die Ursubstanz der Welt und die „Materie“ nur spezielle „Anregungen“ davon, quasi „Ätherwirbel“: „Äther“ als Flüssigkeit, „Materie“ als „Wirbel“, die sich darin bewegen (Lord Thomson (Kelvin))

Der „Äther“ ist ein Festkörper, welcher sich lokal „verflüssigt“, wobei die entstehende „Flüssigkeit“ die „Materie“ darstellt. Die Stellen der „Verflüssigung“ („Materieklumpen“) bewegen sich derartig weiter, dass sich der „Äther“ hinter ihnen wieder verfestigt, d. h. erstarrt (Paul Langevin) .

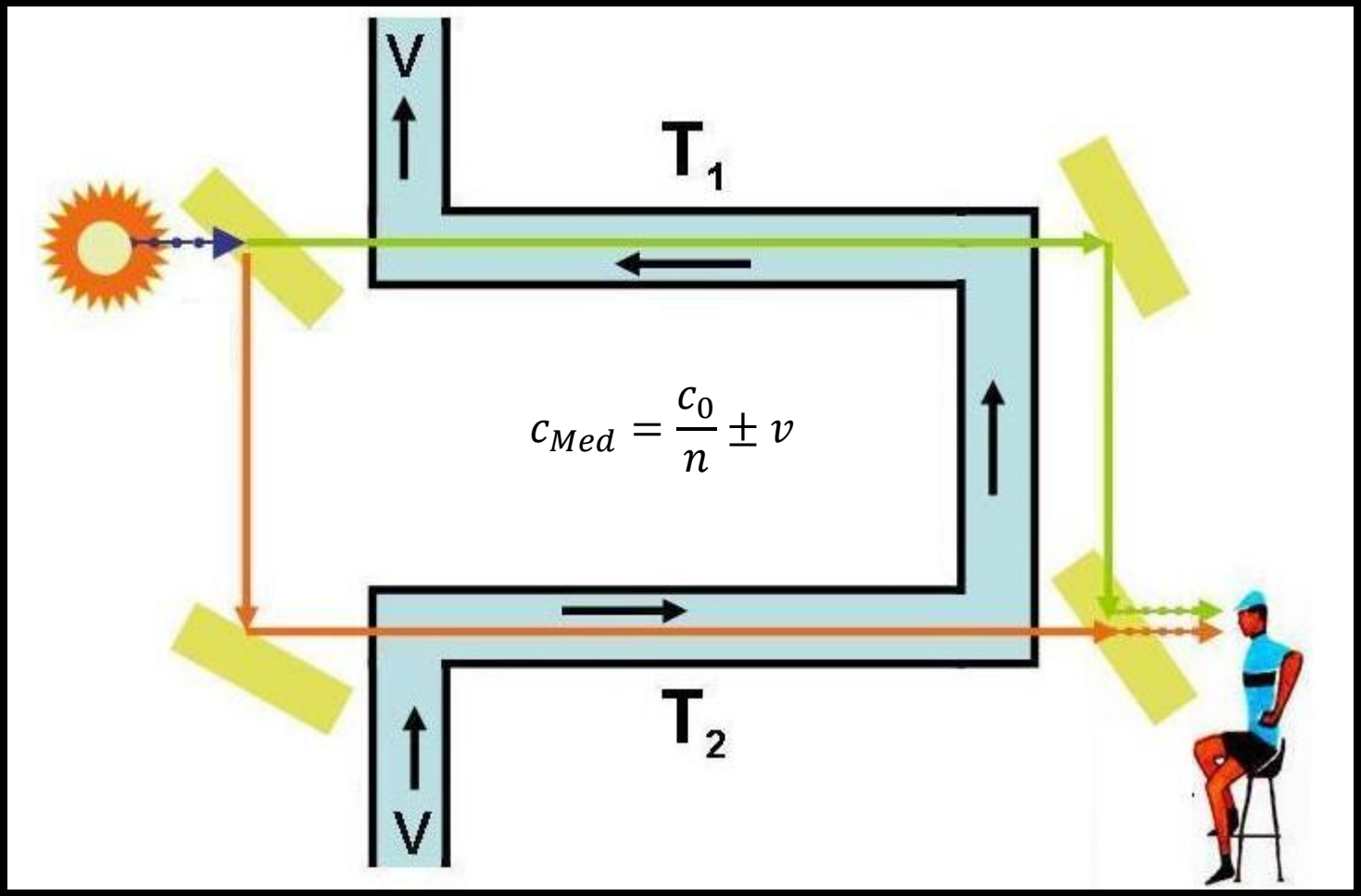
→ damit der Äther in Analogie zu Festkörperwellen die dazu extrem kurzen Lichtwellen übertragen kann, muss er extrem starr sein

Michelson-Morley-Experiment (1881 bzw. 1887)



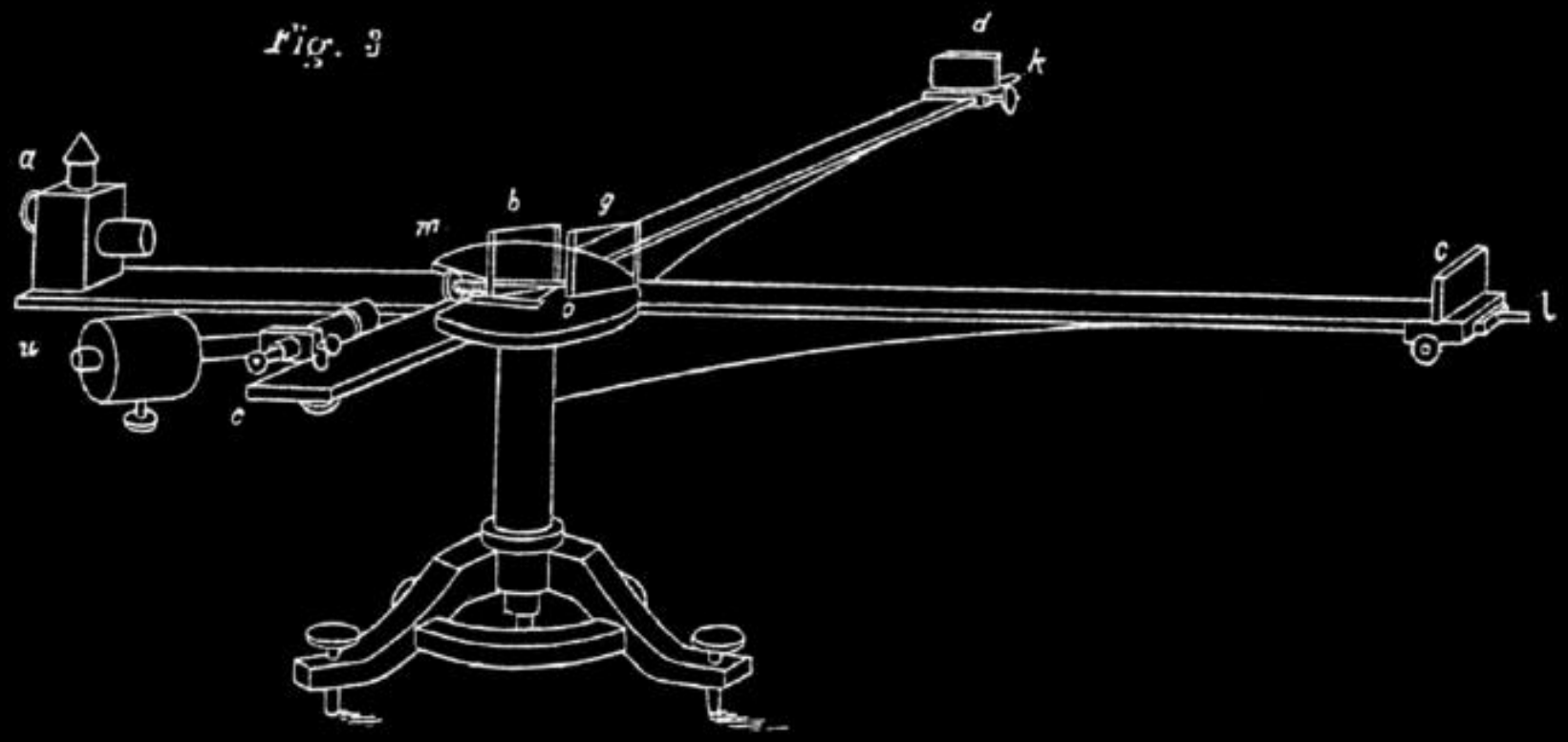
Die Erde sollte bei ihrem Umlauf um die Sonne eine Art „Ätherwind“ spüren. Dessen experimenteller Nachweis würde die Ätherhypothese bestätigen.

Fizeauscher Mitführungsversuch (1851)



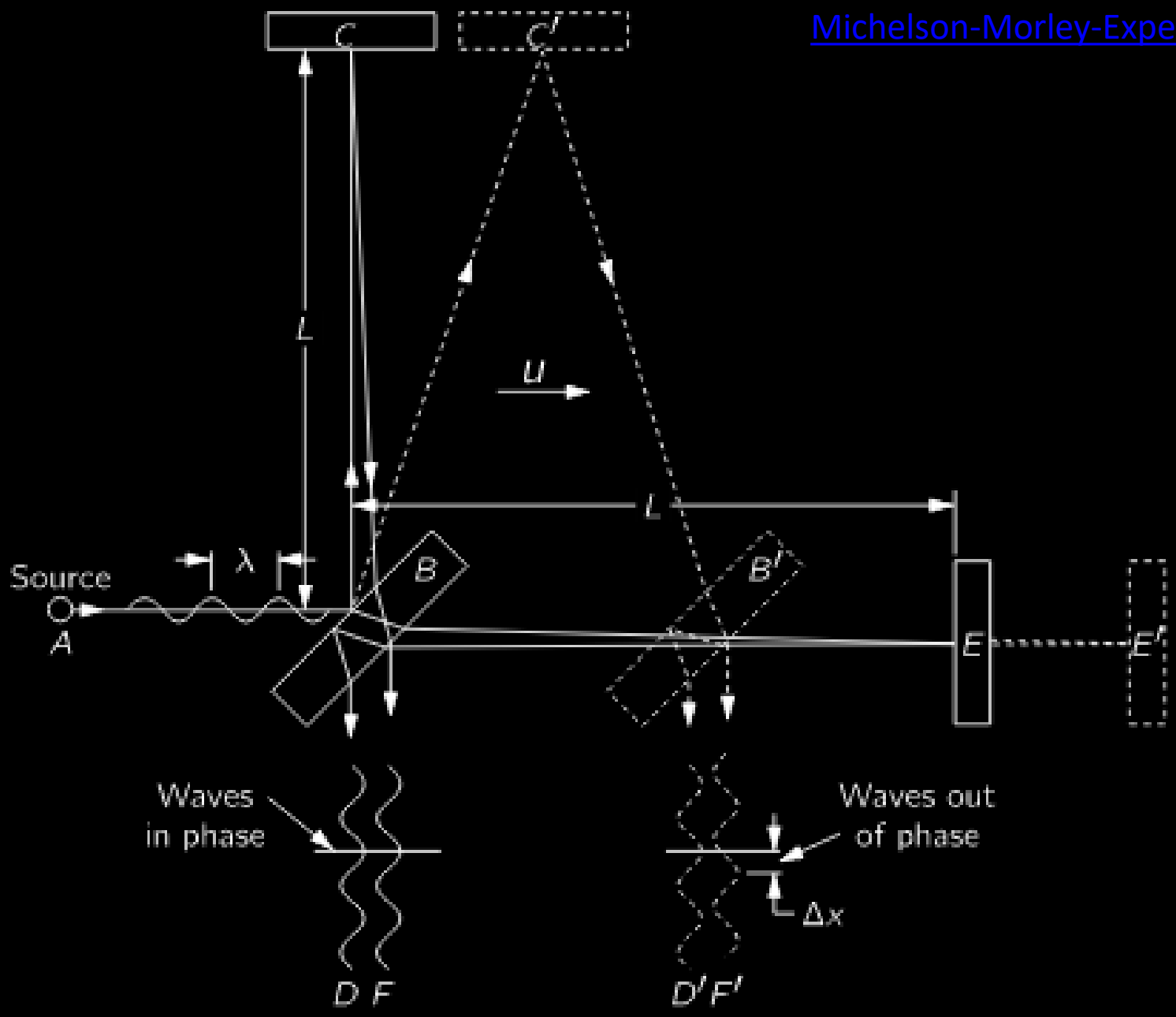
Experimentelles Ergebnis: $c_{Med} = \frac{c_0}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ n = Brechungsindex

Das Michelson-Morley-Experiment



Zielsetzung: Nachweis der Bewegung der Erde in Bezug auf den ruhenden „Weltäther“

VIDEO:
[Michelson-Morley-Experiment]



Quintessenz:

Elektromagnetische Wellen („Licht“) benötigen kein Trägermedium. Es gibt keinen „Weltäther“

Die Maxwellsche Elektrodynamik führt zu der Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad = \text{ konstant}$$

In der klassischen Mechanik gilt das „Klassische Additionstheorem“ der Geschwindigkeiten in Form der sogenannten „Galilei-Transformationen“. Die Maxwellsche Elektrodynamik steht im Widerspruch zu den „Galilei-Transformationen“. Es gilt vielmehr:

„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“

→ PRINZIP DER KONSTANZ DER LICHTGESCHWINDIGKEIT

In der Klassischen Elektrodynamik gibt es offensichtlich Phänomene, die von der Wahl eines Inertialsystems abhängen. Naturgesetze sollten aber unabhängig von einem bestimmten Inertialsystem sein.

→ Aufbau eines Kalküls, welches das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als Axiom enthält.

Die mechanischen und elektrodynamischen Gesetze müssen so formuliert werden, dass sie sich nicht ändern, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem wechselt unter der Prämisse, dass in beiden Inertialsystemen die Vakuumlichtgeschwindigkeit den gleichen konstanten Wert hat.

→ Revision des Begriffs der Gleichzeitigkeit mit der Erkenntnis, dass Längen und Zeitintervalle relativ sind, d. h. vom Bewegungszustand eines Beobachters abhängen

↓

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;* *von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Zeit und die Kausalstruktur der Welt

Kausalität ist eine Erfahrungstatsache und nach Kant a priori gegeben …

Kausalität (lat. *causa*, Ursache) bezeichnet die Beziehung zwischen Ursachen und Wirkungen. Umgangssprachlich ist ein Ereignis oder Zustand A die Ursache einer Wirkung B, wenn A ein Grund ist, der B herbeiführt.

Eine **Kausalkette** ergibt sich, wenn jede Wirkung selbst wieder Ursache eines neuen Ereignisses ist. Sie spiegelt die transitive Natur der Kausalität wieder.

Eine Ursache kommt immer vor einer von ihr bedingten Wirkung

Zeit

Der Begriff des Ereignisses …

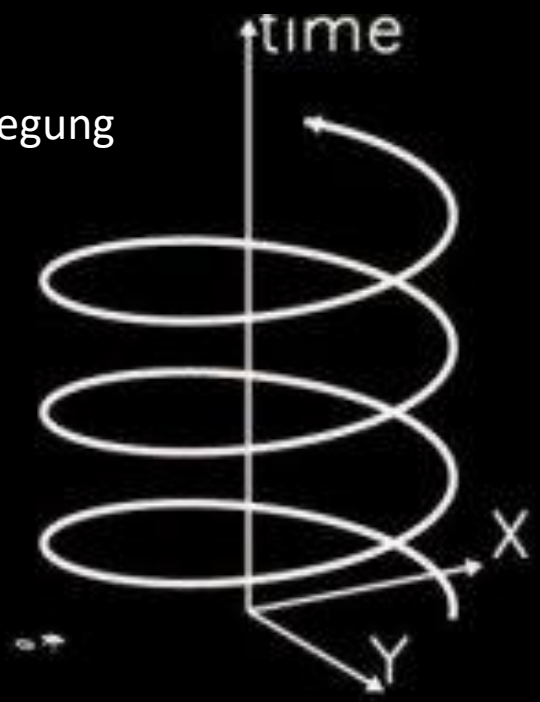
Ort (x,y,z) + Zeit (t) = Ereignis (x,y,z,t)

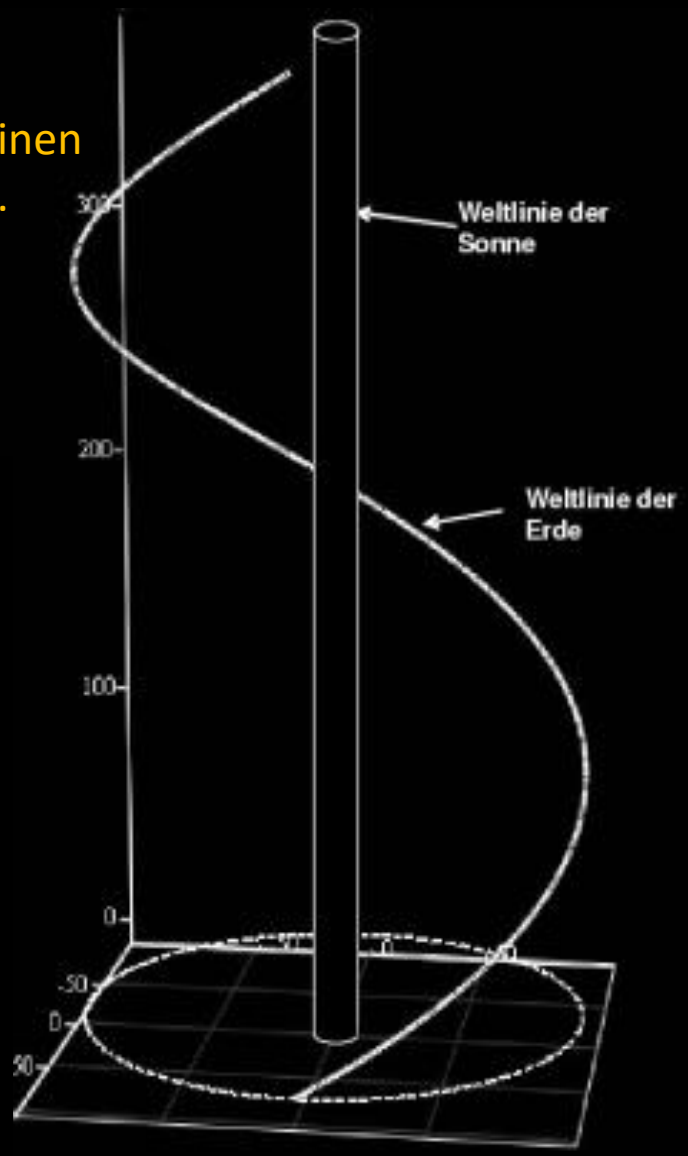
Ein „Ereignis“ ist eindeutig durch einen Zeitpunkt *t* und einen Ort *x,y,z*, an dem es zum Zeitpunkt t stattfindet, gegeben.

Eine stetige „Linie“ von Ereignissen durch die Raum-Zeit nennt man „Weltlinie“

Weltlinie einer Kreisbewegung

Weltlinien verbinden Ereignisse kausal





Klassische Mechanik:

Kausalität definiert eine strenge Ordnung von Ereignissen, d.h. Ereignisse lassen sich in eine topologische Reihenfolge bringen, die eindeutig ist und für die eine Kausalkette gilt und die sich durchnummerieren lässt (durch Zuordnung von Zeitpunkten gemäß der absoluten Zeit Newtons).

Ereignisse, die in der Gegenwart liegen, sind gleichzeitig

$A(x,y,z,t) \rightarrow B(x^*,y^*,z^*,t)$ A und B sind gleichzeitig.

Ereignisse, die zusammen einmal in der Gegenwart lagen, waren gleichzeitig

Die Newtonsche Mechanik besitzt eine strenge Kausalstruktur im Sinn der Anordnung von Ereignissen, ist aber in Bezug auf die Zeitrichtung symmetrisch.

(d.h. alle Ereignisfolgen von der Vergangenheit in die Zukunft sind auch in umgekehrter Reihenfolge erlaubt, d. h. die Zeit dient nur als Parameter und definiert keine Richtung → **Paradox der Zeit**)

Das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

„Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit besitzt in Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters immer denselben Wert. Sie ist eine Naturkonstante.“

$$c_0 = 2.998925 \cdot 10^8 \, m/s$$

Folgt explizit aus der Maxwellschen Elektrodynamik und wurde experimentell in dem Interferometrieversuch von Michelson und Morley 1889 bestätigt.

Albert Einstein machte dieses Prinzip und das „**Spezielle Relativitätsprinzip**“ (d. h. „die Gesetze der Maxwellschen Elektrodynamik sind in allen Inertialsystemen gleich“) zur Grundlage einer neuen physikalischen Weltbeschreibung, die bei Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, nahtlos in die „Klassische Mechanik“ Newtons übergeht.

Da die Geschwindigkeit gleich Weg durch Zeit ist und die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen konstanten Wert hat, gilt:

- **Lichtweg** = Lichtgeschwindigkeit mal Zeit
- Man kann mathematisch die Zeit wie eine Länge behandeln

Ereignis: (x,y,z, -c*t) → „vierdimensionaler Raum“

Der Minkowski-Raum

1907: Ereignisraum der speziellen Relativitätstheorie

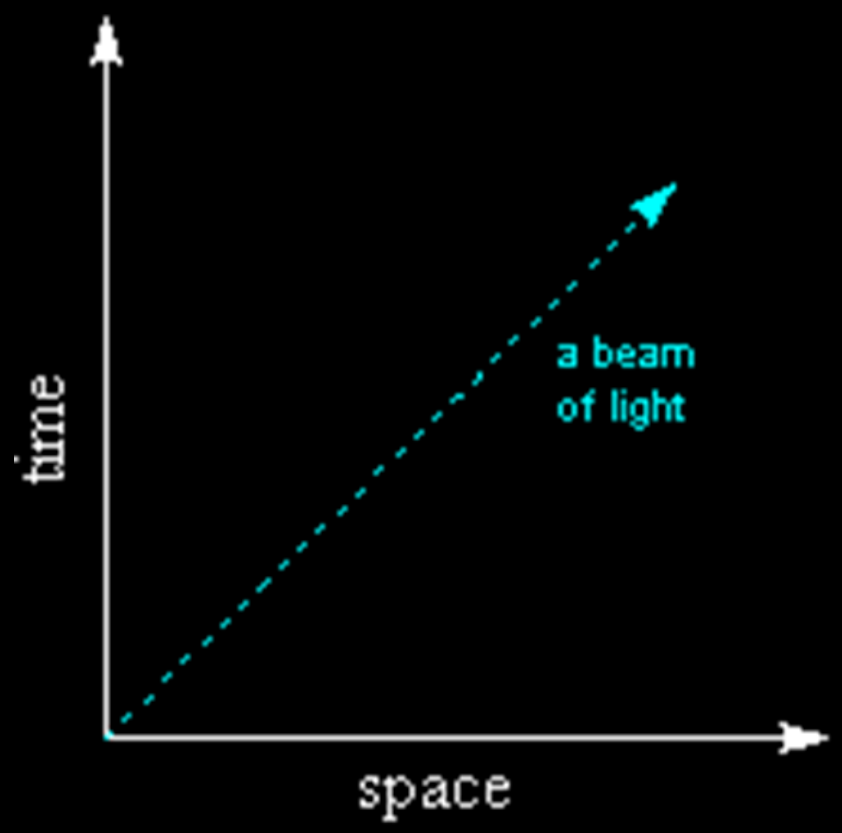
- Punkte sind Ereignisse
- Ereignisse bilden ein vierdimensionales Kontinuum
- Metrik ist pseudo-euklidisch (wegen der Zeitkoordinate)
- Teilräume repräsentieren die Kausalstruktur der Welt für einen Beobachter

Hermann Minkowski
(1864-1909)

Von nun an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren …

Zur Vereinfachung: Raum wird zur Ebene (nur x und y –Koordinate)
Zeit wird als 3. räumliche Koordinate dargestellt (d. h. als Lichtweg)

Raum – Zeit - Diagramm



$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

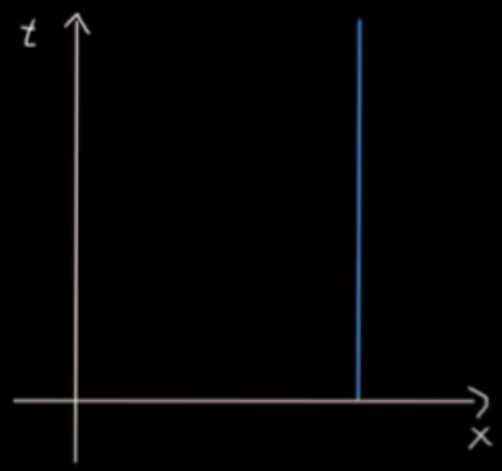
$$x_3 = z$$

$$x_4 = -c_0\, t$$

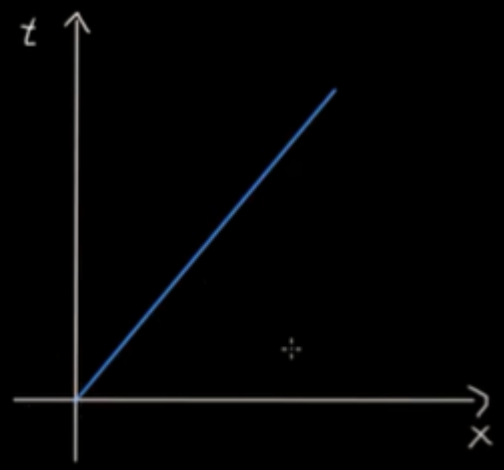
Jeder Punkt in diesem Diagramm stellt ein Ereignis, jede stetige Linie eine Weltlinie dar

Das Diagramm ist so skaliert, dass die Kurve eines lichtschnellen Teilchens (Photon) eine Gerade mit einem Anstellwinkel von 45° bildet (Beispiel: zweidimensionale Raum-Zeit)

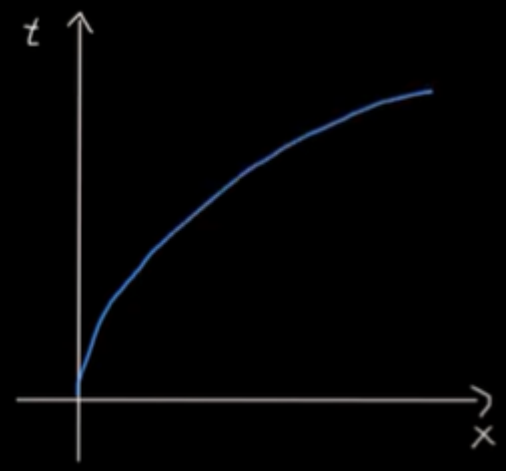
Beispiel: Relativität der Gleichzeitigkeit



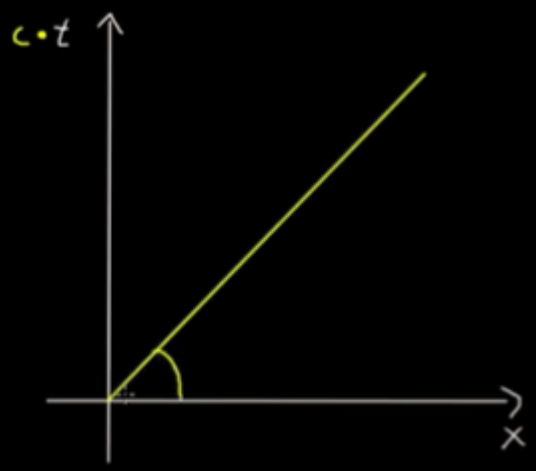
v=0

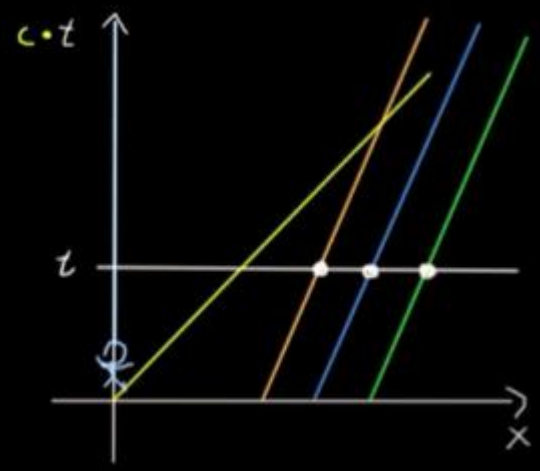


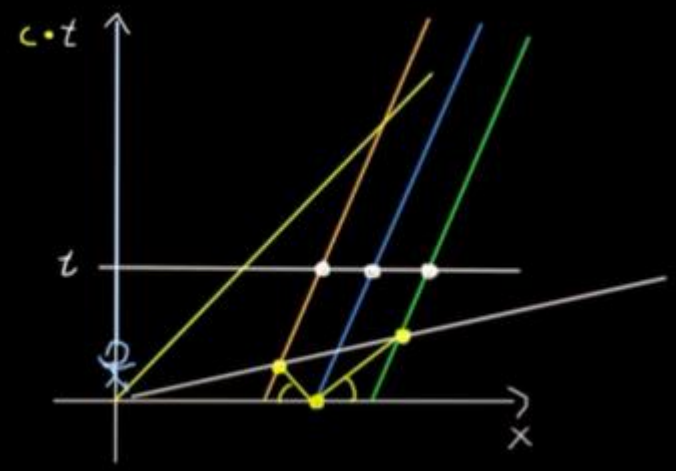
v>0 = const.

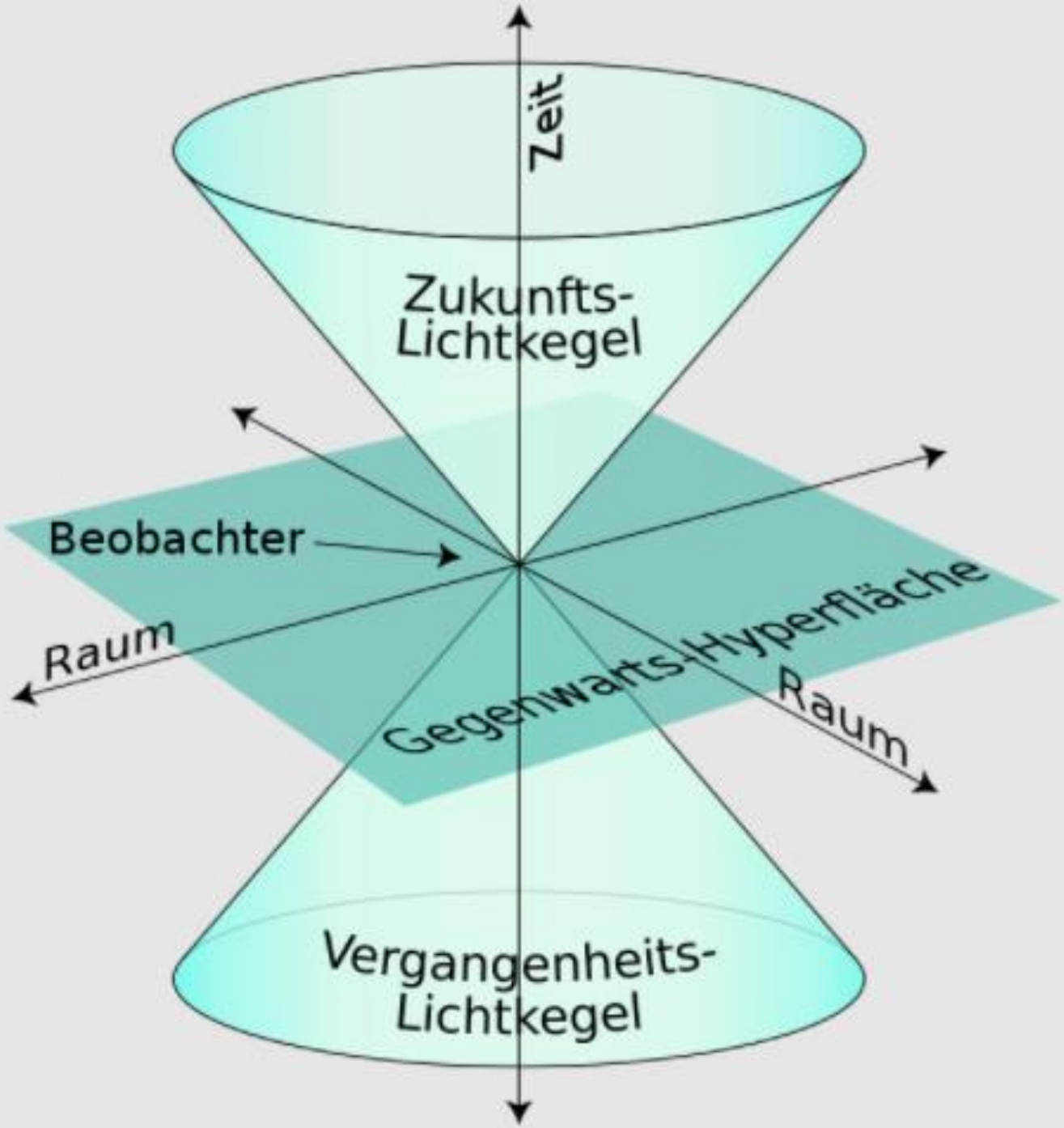


v=a*t (beschleunigt)








Zeit
Zukunfts-
Lichtkegel
Beobachter
Raum
Gegenwarts-Hyperfläche
Raum
Vergangenheits-
Lichtkegel

Raum-zeitliche Abstände im Minkowski-Raum:

Metrik: $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

„Raumzeitlicher Abstand zwischen zwei Ereignissen“

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$ „räumlicher“ Abstand

$$dx_4^2 = -c_0^2 dt^2$$ „zeitlicher“ Abstand

1. Zeitlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem räumlichen Anteil

$$dr^2 < c_0^2 dt^2 \qquad zeitartiges\ Intervall\ ds^2$$

Alle Materieteilchen legen in einem Meter Lichtlaufzeit stets weniger als einen Meter im Raum zurück → Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit

2. Räumlicher Anteil des Intervalls überwiegt gegenüber dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 > c_0^2 dt^2 \qquad raumartiges\ Intervall\ ds^2$$

Materieteilchen müssten sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, um zwei raumartige Ereignisse miteinander zu verbinden

3. Räumlicher Anteil des Intervalls ist gleich dem zeitlichen Anteil

$$dr^2 = c_0^2 dt^2 \qquad lichtartiges\ Intervall\ ds^2$$

Wenn ein Ereignis durch Aussenden eines Lichtsignals ein anderes Ereignis direkt beeinflussen kann, dann sind diese beiden Ereignisse lichtartig miteinander verbunden

Kausalstruktur der Minkowski-Raum-Zeit

Durch die Endlichkeit und die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand des Bezugssystems wird eine zeitliche Ordnung und damit auch eine Kausalordnung zwischen Ereignissen gewährleistet.

- ✓ **Ereignisse, die raumartig zueinander liegen, können sich kausal nicht beeinflussen.**
- ✓ **Wir können durch Handlungen nur die Zukunft beeinflussen**
- ✓ **Vergangene Ereignisse können die Gegenwart beeinflussen**

Das Kausalprinzip (Kausalitätsprinzip) bedeutet, dass jedes Geschehen seine (materielle) Ursache hat, und es keine ursachelosen, "akausalen" Dinge, Erscheinungen, Abläufe usw. gibt. Dieses in elementarer Form bereits von Aristoteles formulierte Kausalprinzip entspricht der Interpretation des Satzes vom zureichenden Grund: "*nihil fit sine causa*" ("nichts geschieht ohne Ursache").

Preisfrage: Ist die Kausalität ein absolut gültiges Naturgesetz?

→ Zweifel sind angebracht (Quantenmechanik, verschränkte Systeme)

Die Endlichkeit und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum prägt der Welt eine Makro-Kausalitätsstruktur auf:

→ Vergangenheit – Gegenwart – Zukunft

Der raum-zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen ist eine Invariante

$ds^2 < 0$ Zeitartiger Abstand

$ds^2 = 0$ Lichtartiger Abstand

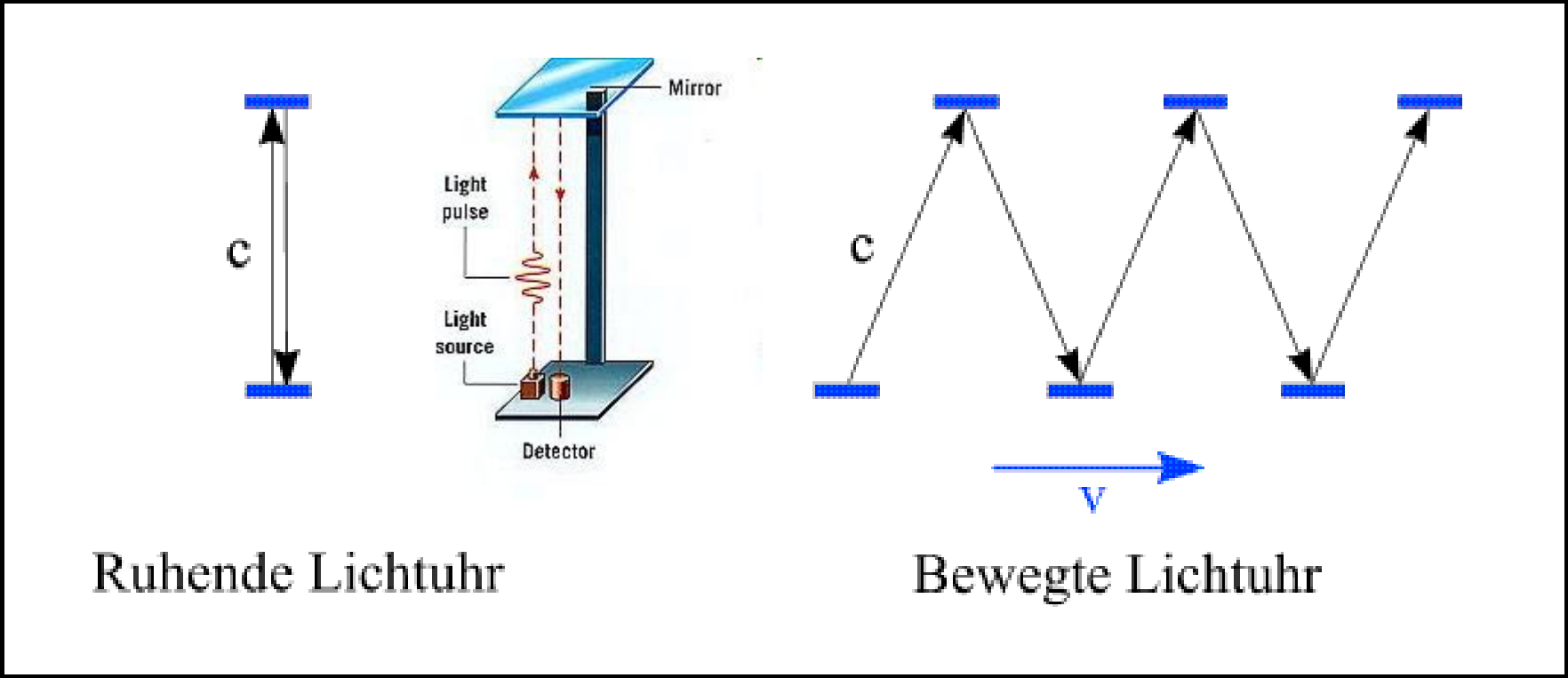
$ds^2 > 0$ Raumartiger Abstand

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

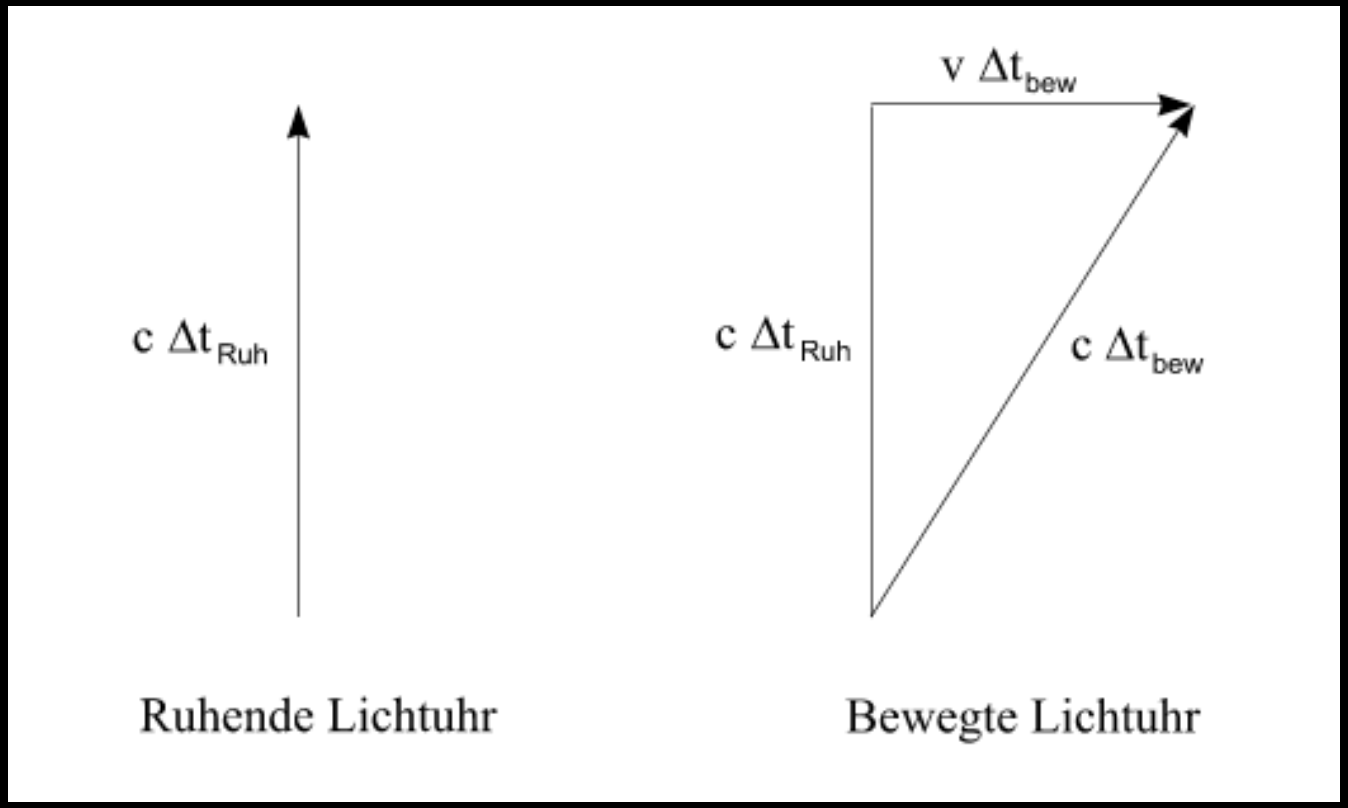
Minkowski-Metrik

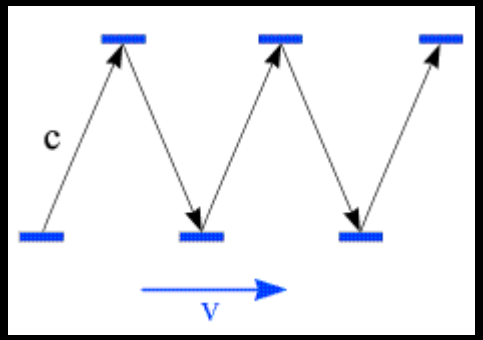
Effekte der Speziellen Relativitätstheorie

Zeitmessung – die „Lichtuhr“



Zeit = Lichtlaufweg durch (konstante) Lichtgeschwindigkeit





$$\left(c\Delta t_{bew}\right)^2 = \left(c\Delta t_{Ruh}\right)^2 + \left(v\,t_{bew}\right)^2$$

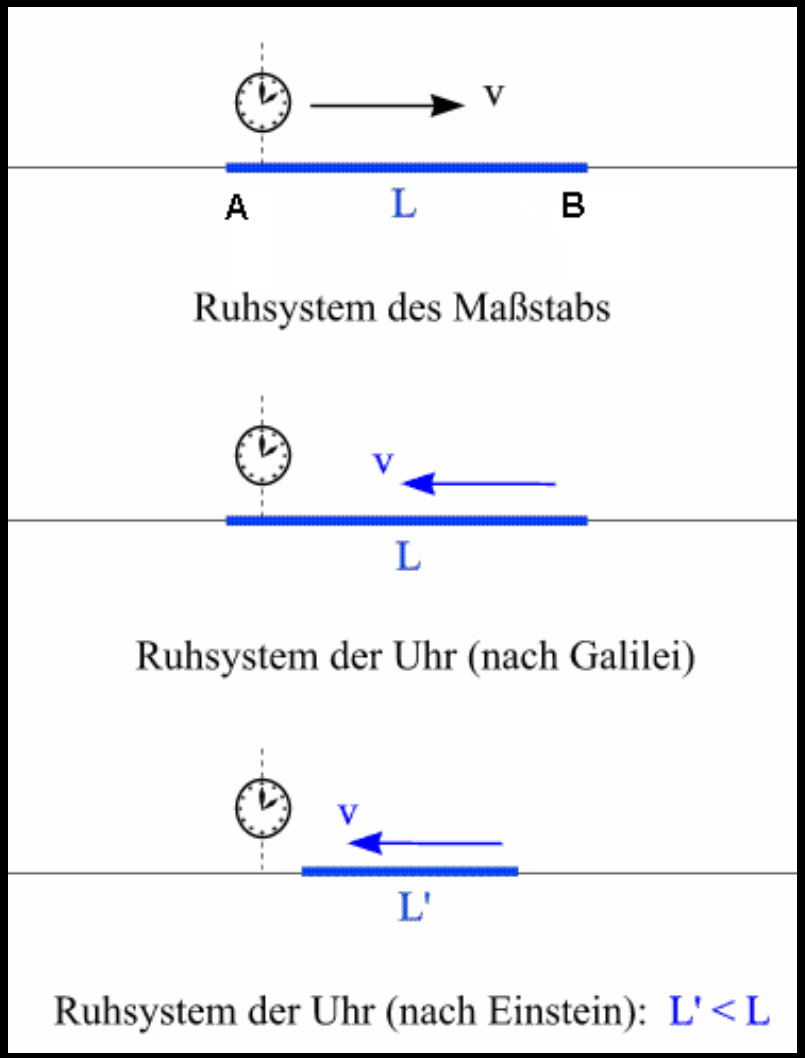
$$\Delta t_{bew} = \frac{\Delta t_{Ruh}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht um den Faktor

$$\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

langsamer als in ihrem Ruhsystem

Die Lorentz-Kontraktion



Uhr bewegt sich entlang Maßstab L
Eigenzeit Uhr < L/v (d. h. sie geht langsamer)

Maßstab L bewegt sich an der Uhr vorbei
Er schafft es aber in der Eigenzeit der
Uhr nicht wegen t (Uhr) < L/v

→ Widerspruch

Die Länge des Maßstabs ist – wenn sie
im Ruhesystem der Uhr gemessen wird –
kleiner als L, damit der Maßstab es schafft,
sich an der Uhr in der zur Verfügung
stehenden kürzeren Zeit t (Uhr) vorbei
zu bewegen

Im *Ruhesystem des Maßstabs* vergeht zwischen den Ereignissen A und B das Zeitintervall

$$\Delta t = L / v$$

Die Uhr selbst misst zwischen den Ereignissen A und B das (kleinere) Zeitintervall

$$\Delta t_{Uhr} = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}$$

Im Ruhsystem der Uhr hat der Maßstab also die Länge L‘ und benötigt fürs Vorbeifliegen die Zeit

$$\Delta t \sqrt{1-\beta^2}$$

Folglich gilt:

$$L' = v \Delta t \sqrt{1-\beta^2} = L \sqrt{1-\beta^2}$$

Ein mit Geschwindigkeit v bewegtes Objekt ist in Bewegungsrichtung um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ kürzer als in seinem Ruhsystem

Lorentzsche Längenkontraktion

Längenkontraktion wirkt nur in Bewegungsrichtung!

Aus dem Postulat der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen:

A) Bewegte Uhren gehen langsamer

B) Bewegte Körper sind in Bewegungsrichtung verkürzt

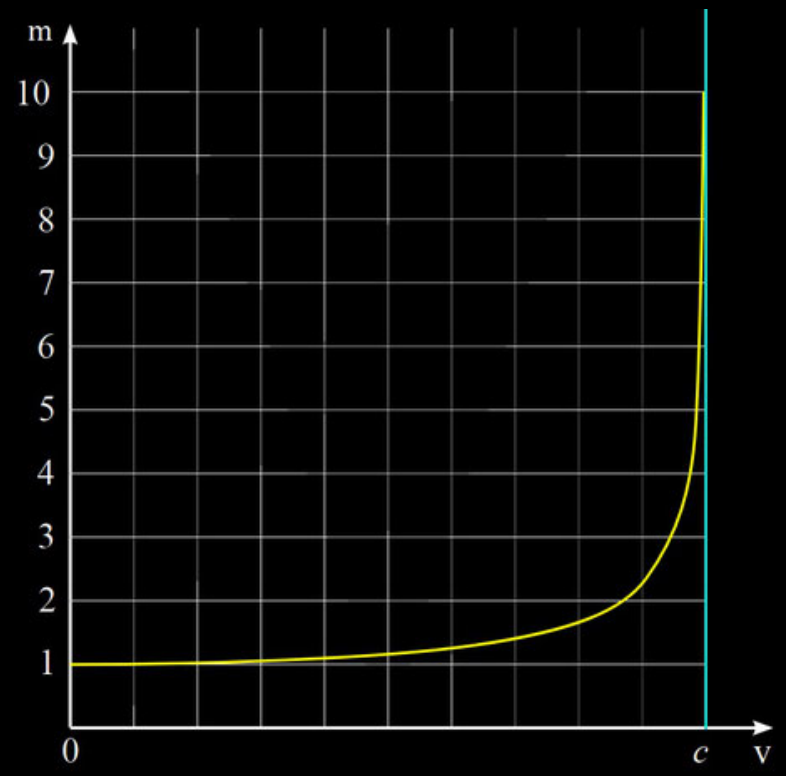
Ist das *wirklich* so?

Das „Garagen-Paradoxon“

Weitere Effekte der Speziellen Relativitätstheorie

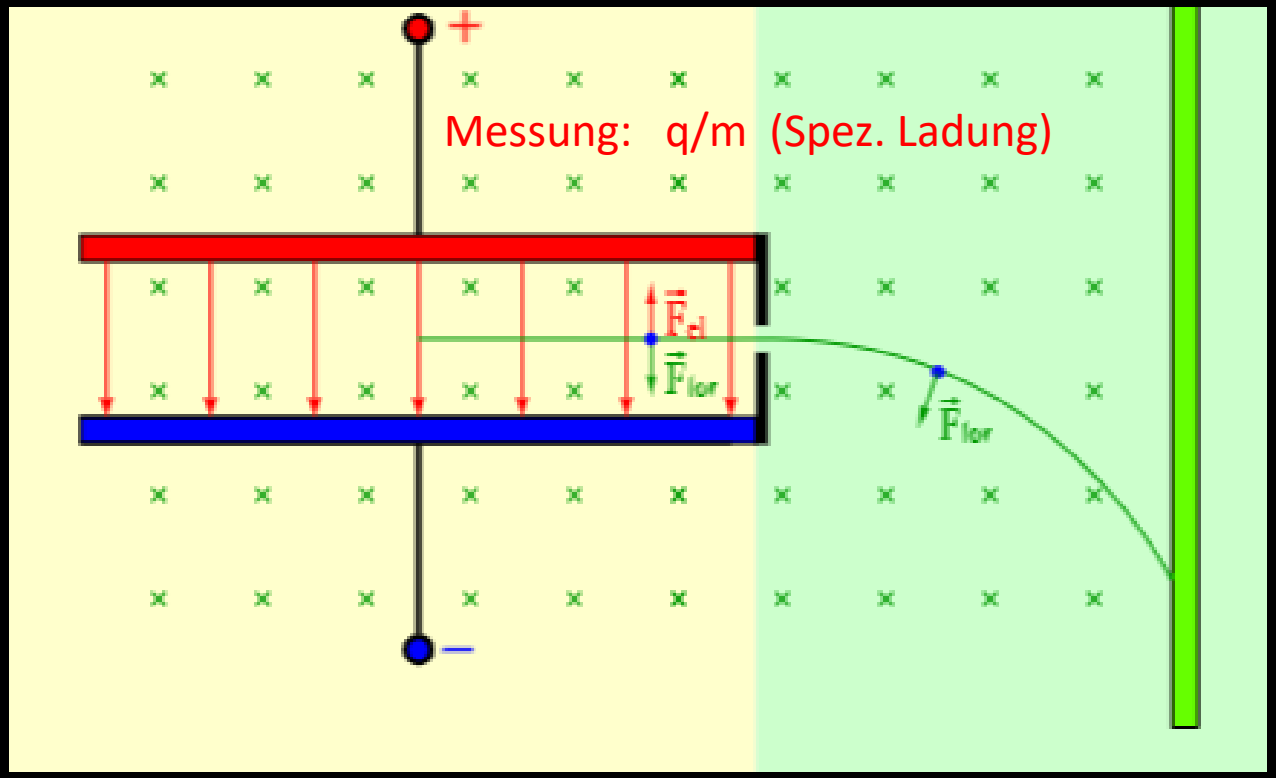
Relativistische Massenzunahme

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$m = \frac{2000kg}{\sqrt{1 - \frac{(150.000.000\frac{m}{s})^2}{(300.000.000\frac{m}{s})^2}}} = 2309,4kg$$

Experiment von Kaufmann und Bucherer



Walter Kaufmann
(1871-1947)

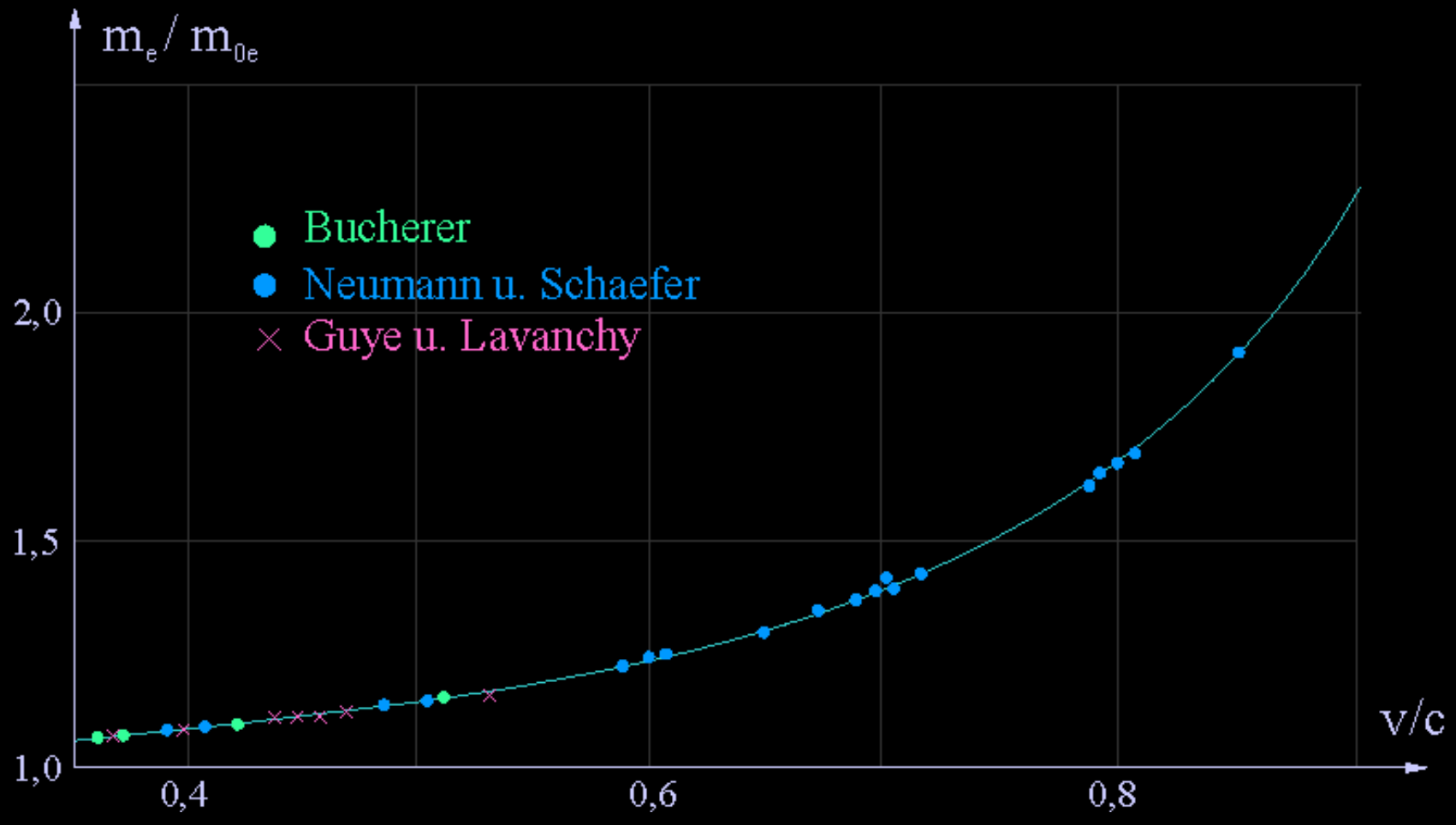
Alfred Bucherer
(1863-1927)

Hängt die träge Masse eines Elektrons von dessen Impuls (Geschwindigkeit) ab?

Kathodenstrahlen: v bis 0.3c
Beta-Strahlen: v = 0.7c - 0.9c (Abhängig vom Isotop)

Ergebnis:

Da die Ladung konstant ist, muss die (Impuls-) Masse mit der Geschwindigkeit zunehmen



Masse – Energie - Äquivalenz

Energie und Massenänderung hängen untrennbar zusammen:

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

(Es handelt sich um eine Zuordnung. Sie darf nicht als Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt verstanden werden.)

Jedes physikalische System (Teilchen, Körper…) mit der Masse m_0 besitzt eine **Ruheenergie** $E_0 = m_0 c^2$.

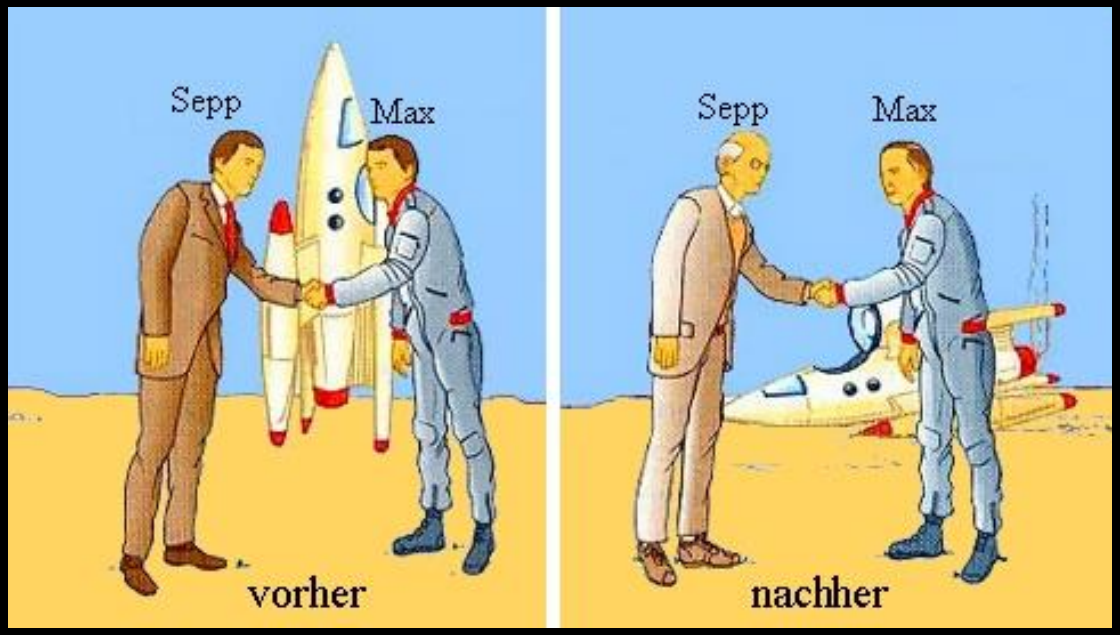
Die **Gesamtenergie** ist Ruheenergie + kinetische Energie: $E = E_0 + E_{kin}$

Beispiel: Massedefekt bei Kernfusion

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Das Zwillingsparadoxon

In einem **Gedankenexperiment** fliegt ein Zwilling mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zu einem fernen Stern, während der andere Zwilling auf der Erde zurückbleibt. Anschließend kehrt der reisende Zwilling mit derselben Geschwindigkeit wieder zurück. Nach der Rückkehr auf der Erde stellt sich heraus, dass der dort zurückgebliebene Zwilling älter geworden ist als der gereiste - eine Folge der **Zeitdilatation**.



<u>Problem:</u>

Symmetrie des Problems

Man kann sowohl das Inertialsystem von Sepp als auch das Inertialsystem von Max als ruhend betrachten

Lösung des Problems:

Die Symmetrie wird dadurch gebrochen, dass der eine der Zwillinge erst eine Beschleunigungsphase durchmachen muss, um auf nahezu Lichtgeschwindigkeit zu kommen. Bei der Rückkehr muss er dagegen abbremsen (negative Beschleunigung) , um sicher bei seinem Zwillingsbruder landen zu können. Und außerdem ist ein Richtungswechsel notwendig…

Die „Spezielle Relativitätstheorie“ gilt nur für Inertialsysteme (deshalb „speziell“). In beschleunigten Bezugssystemen ist sie nicht anwendbar.

Albert Einstein: Naturgesetze sollten aber in allen Bezugssystemen (d. h. auch beschleunigten) in gleicher Weise gelten. Oder anders ausgedrückt: Mathematisch sind Naturgesetze so zu formulieren, dass sie von einem gegebenen Bezugssystem unabhängig sind.

→ ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

ARTE-Doku über die Relativitätstheorie

Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie von 1905 und insbesondere die geometrische Deutung durch Herrmann Minkowski wurden von den Physikern jener Zeit als Revolution empfunden. Trotzdem wurde sie – insbesondere von Einstein selbst – als unbefriedigend angesehen, da sie **Inertialsysteme** unnatürlich in den Vordergrund rückte.

Arbeitshypothese: Naturgesetze müssen so formuliert werden, dass sie in **jedem** Bezugssystem (also auch beschleunigten) gelten.

KOVARIANZPRINZIP:

Invarianz der physikalischen Gesetze gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. „Koordinaten“ sind Hilfsgrößen in der Physik und sollten deshalb bei der Formulierung grundlegender Naturgesetze keine Rolle spielen.

Das Äquivalenzprinzip als Schlüssel für die ART

Beobachtung:

Jeder Körper fällt (im Vakuum) in einem Schwerefeld mit der jeweils gleichen Beschleunigung . Es gilt dabei nach Newton die Beziehung:

$$m_t \cdot g = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

- M ist die Quelle des Gravitationsfeldes = „Gravitationsladung“
- m_t ist die träge Masse des Körpers, der im Gravitationsfeld beschleunigt wird

Da die Gravitationsbeschleunigung g von der (trägen) Masse eines Körpers unabhängig ist, muss die „träge“ Masse der „schweren“ Masse streng proprtional sein.

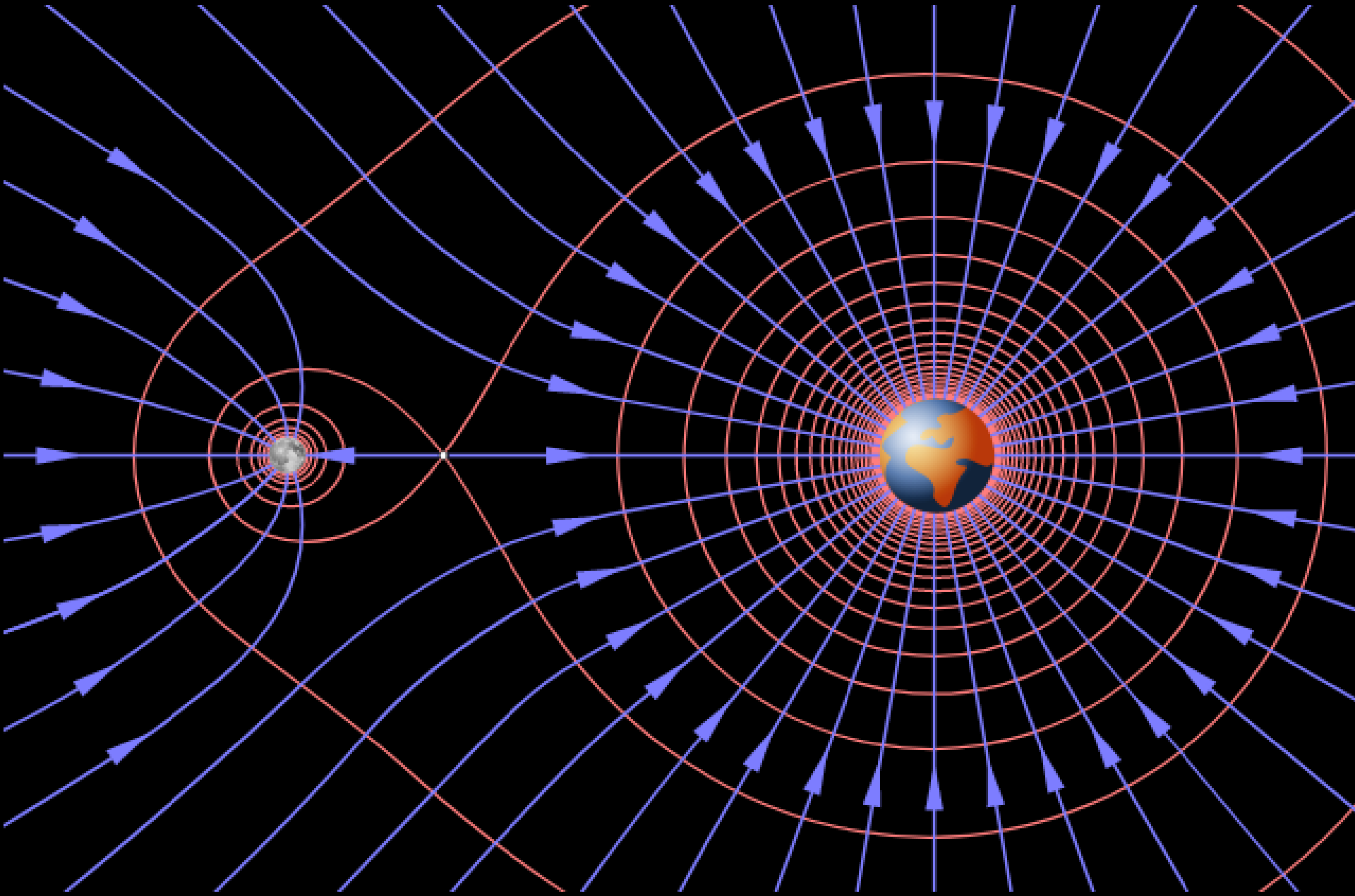
➢ In unserem Einheitensystem ist der Proportionalitätsfaktor = 1
(träge Masse = schwere Masse)

Klassische Beschreibung der Schwerkraft (Gravitation)

$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{G}$
$\lvert\mathbf{E}\rvert \sim \frac{Q}{r^2}$	$\lvert\mathbf{G}\rvert \sim \frac{M}{r^2}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert \sim q$	$\lvert\mathbf{a}\rvert \neq \mathcal{F}(m)\,,\ a = const.$

Vergleich elektrisches Feld und Gravitationsfeld

- Die Gravitationskraft wird durch ein konservatives Potentialfeld – das Gravitationsfeld – vermittelt
- Das Gravitationsfeld geht von der „schweren Masse“ aus, die deshalb auch in Analogie zur elektrischen Ladung als „Gravitationsladung“ bezeichnet wird
- Es gibt nur positive Gravitationsladungen (d. h. die Gravitationskraft ist immer anziehend)
- Die Kraftwirkung nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab
- Die Gravitation ist nicht abschirmbar
- Ein im Gravitationsfeld frei fallender Körper „spürt“ keine Kraftwirkung (Schwerelosigkeit)
- Das Gravitationspotential einer Masse M ist immer negativ und so skaliert, dass es im Unendlichen verschwindet. Es gibt die (Hub-) Arbeit (Energie) an, um einen Körper an der Position r ins Unendliche zu verschieben…



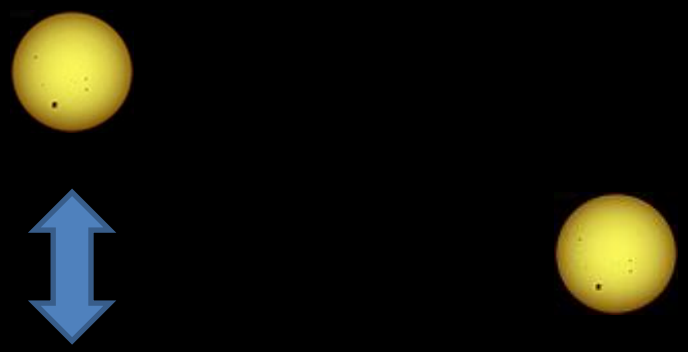
Problem:

Die „klassische“ Gravitationstheorie Newtons widerspricht der Speziellen Relativitätstheorie (Lorentzinvarianz, instantane Gravitationswirkung)

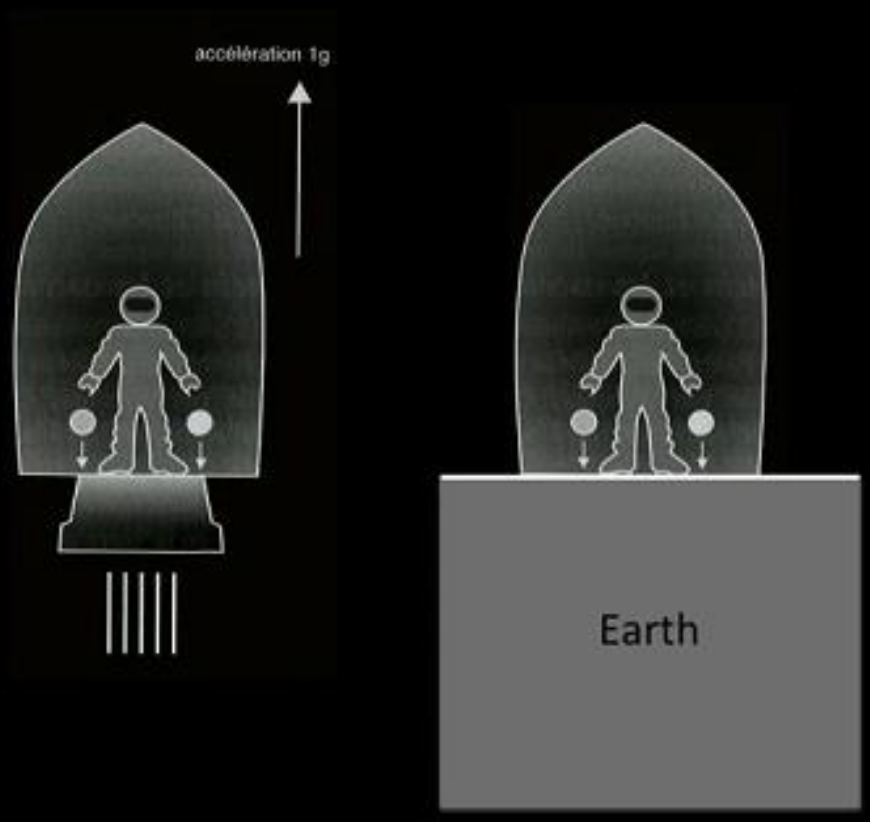
<u>Gedankenexperiment „Balkenwaage“</u>

Balkenwaage reagiert instantan auf eine radiale Verschiebung der Sonne

D. h., nach Newtons Theorie würde die Waage in exakt demselben Augenblick ansprechen, in dem die entfernte Masse bewegt wird, und ein Signal wäre verzögerungsfrei übermittelt worden – was nach der SRT verboten ist.



Das Gleichnis mit den Fahrstühlen …



Beide Beobachter spüren die gleiche Beschleunigung.

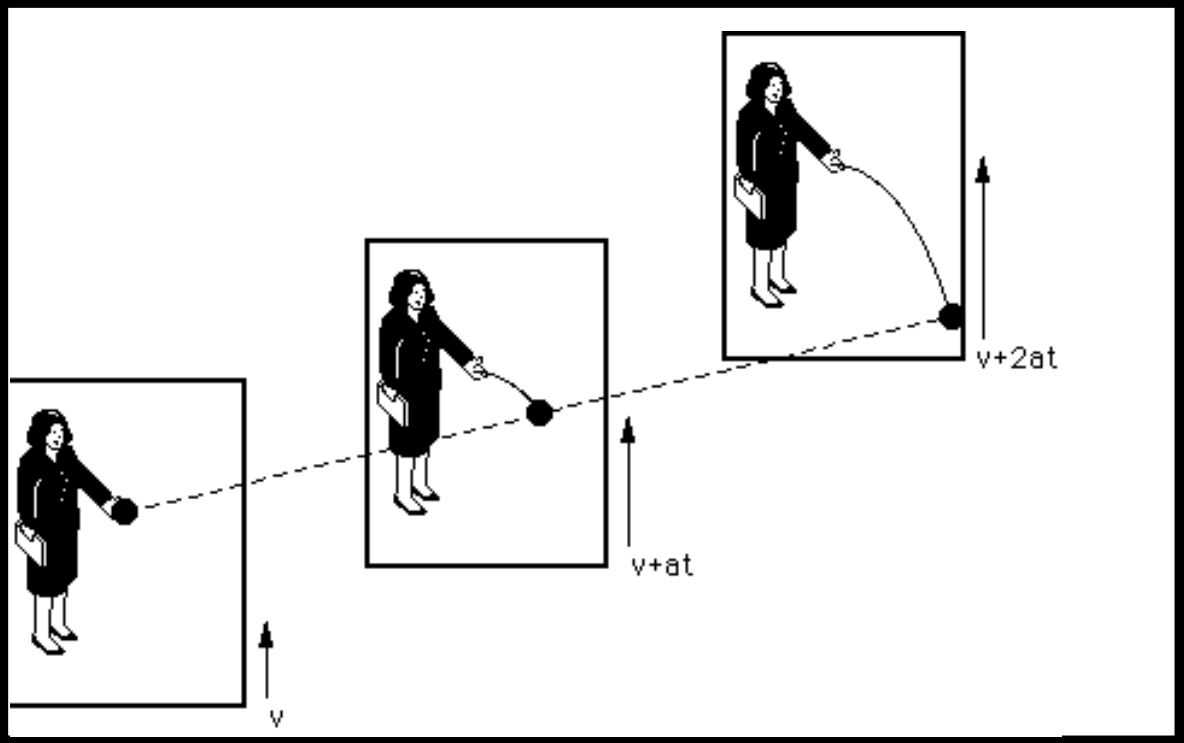
FRAGE:

Ist es möglich, mit einem Experiment in der Kabine zu entscheiden, ob der Beobachter in einem Gravitationsfeld ruht oder ob er im freien Weltraum mit der gleichen Beschleunigung beschleunigt wird?

„Frei schwebendes Bezugssystem“ → Lokales Minkowski-System

Erkenntnis:

In einem hinreichend kleinen „Raum“ (= lokales Minkowski-System) kann man durch keine physikalische Messungen in dessen Inneren (= Lift-Kabine) feststellen, ob dieser Raum in einem homogenen Gravitationsfeld mit der Schwerebeschleunigung g ruht oder durch eine von außen wirkende Kraft mit der Beschleunigung g beschleunigt wird.



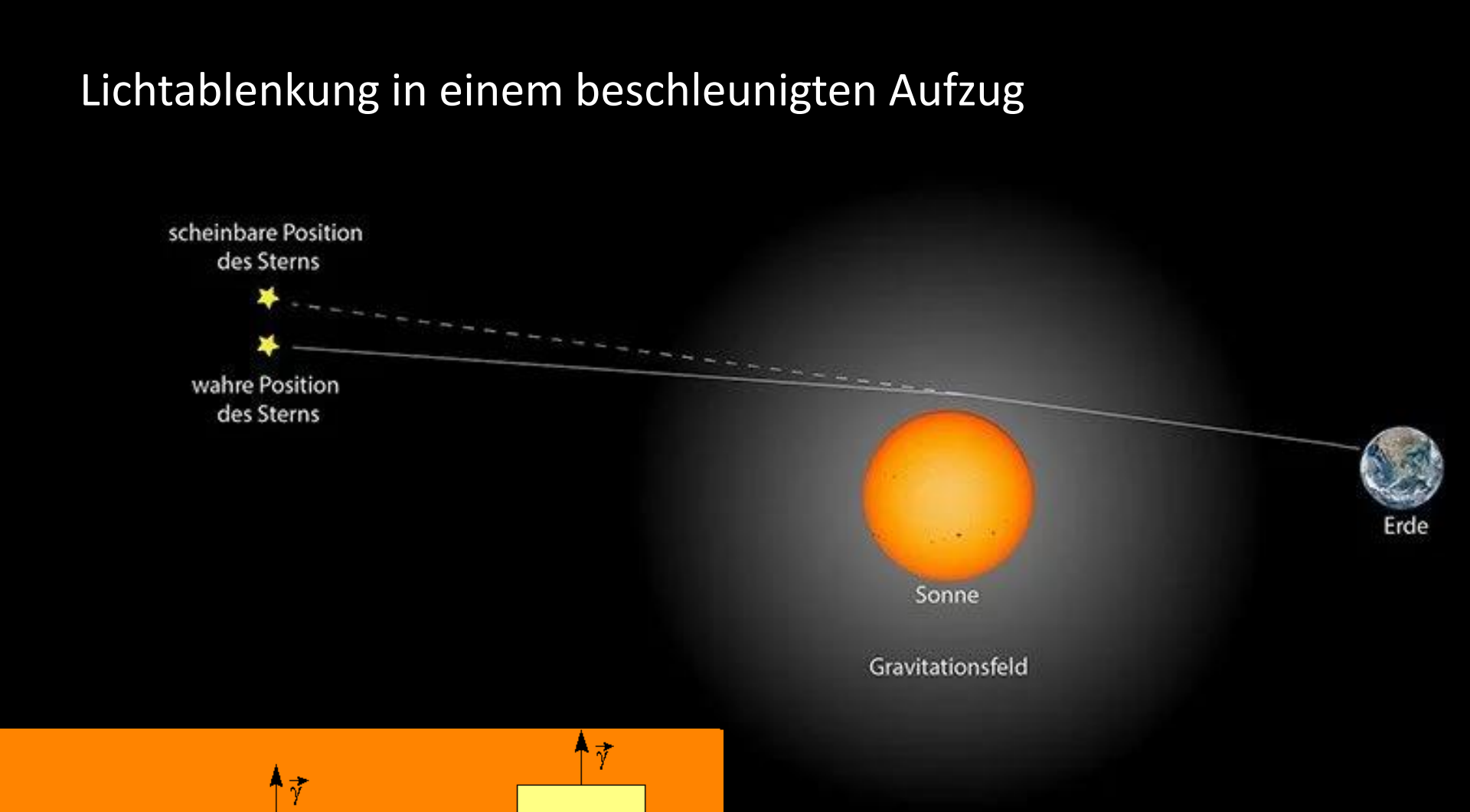
Ruhendes Bezugssystem:

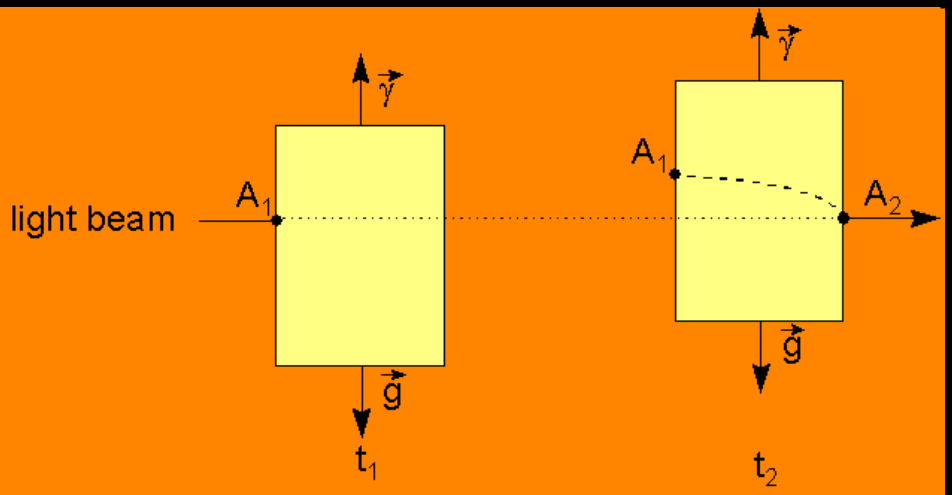
Kugel bewegt sich geradlinig gleichförmig – Bahnkurve ist eine Gerade

Beschleunigtes Bezugssystem:

Kugel bewegt sich beschleunigt – Bahnkurve ist eine Wurfparabel

Lichtablenkung in einem beschleunigten Aufzug





Äquivalenzprinzip:

Lichtablenkung in einem Schwerefeld

Nochmal: „freischwebendes Bezugssystem“ → Schwerelosigkeit

Realisierung:

- irgendwo im Kosmos weitab von größeren Massen
- freier Fall in einem Gravitationsfeld

$$\int_A^B ds^2 = Extremal$$

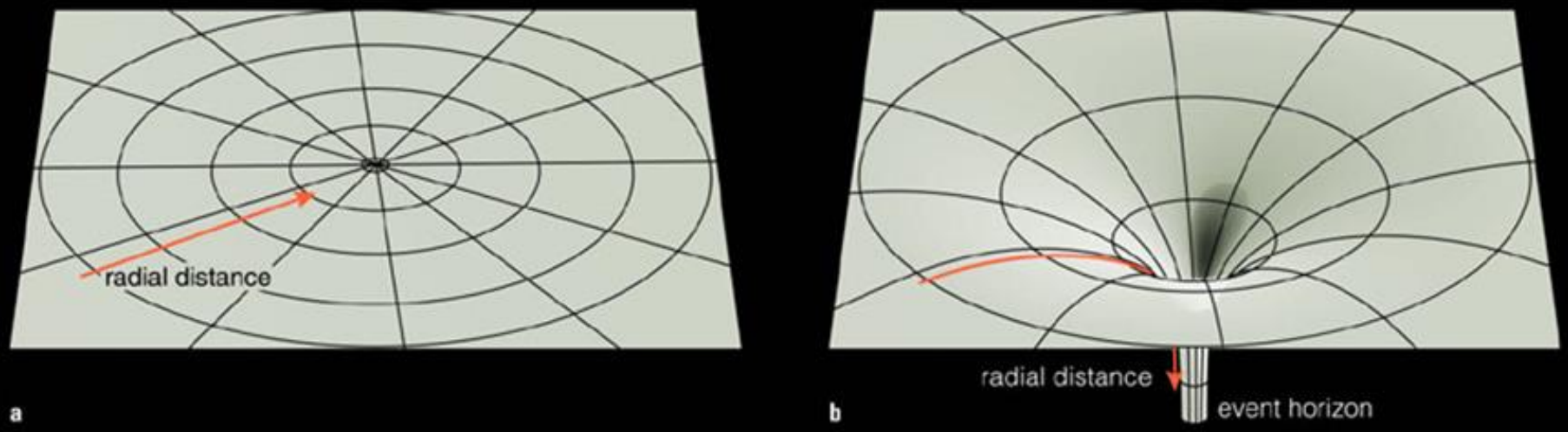
→ Geodäte

$$ds^2 = g_{11}dx_1 + g_{12}dx_2 + g_{21}dx_1 + g_{22}dx_2 + \ldots$$

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{4} dx_i g_{ij} dx_j = dx_i g_{ij} dx_j$$

Geodäte:

- In einem euklidischen Raum → Gerade
- Nichteuklidischen Raum → „gekrümmte“ Linie

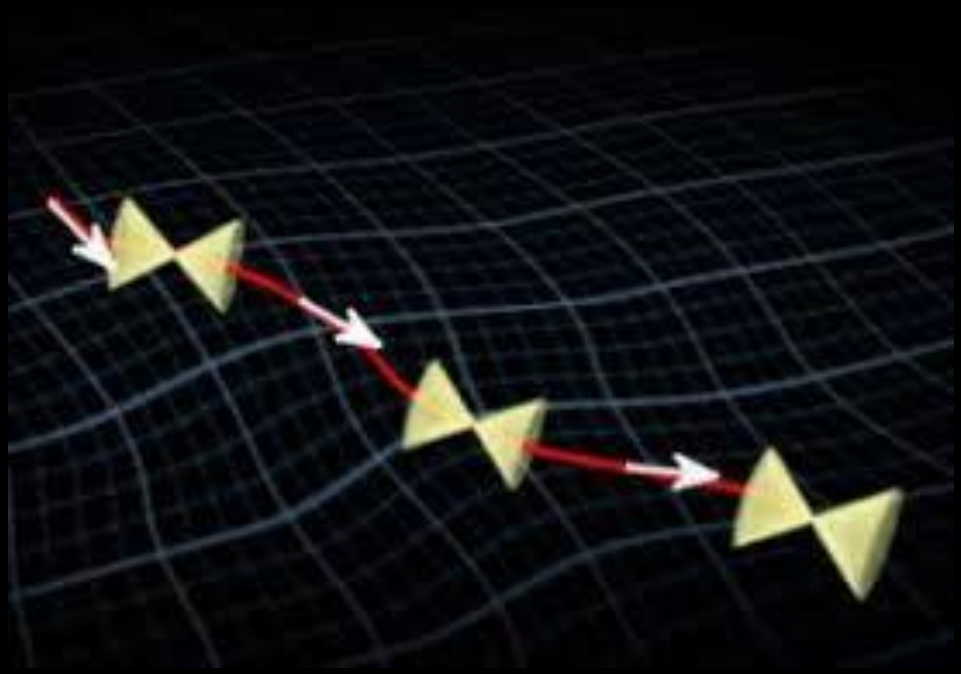


Durch was ist eine „Geodäte“ von anderen Verbindungslinien von einem Ereignis A zu einem Ereignis B ausgezeichnet?

Prinzip der maximalen Alterung:

Der Weg, den ein Körper zwischen zwei Ereignissen A und B in der Raumzeit nimmt, ist der Weg, für den die Eigenzeit des Körpers zwischen diesen Ereignissen ein Extremum ist.

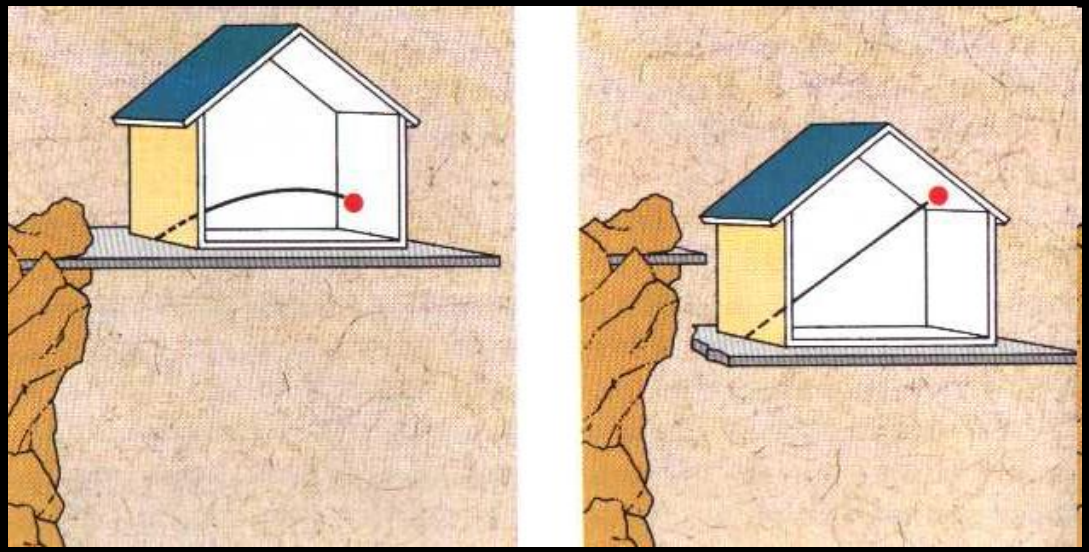
- Der Zwilling, der sich gegenüber dem anderen Zwilling beschleunigt bewegt, altert weniger… (Stichwort: Zwillingsparadoxon)
- Eine **Geodäte** ist die Bahn durch die Raumzeit, auf der ein Körper maximal altert …



Bedingung für kräftefreie Bewegung von einem Ereignis A zu einem Ereignis B

Das Prinzip der maximalen Alterung besagt, dass ein Teilchen, das nicht von äußeren Kräften beeinflusst wird, den längsten Weg in der Raumzeit zurücklegt, d. h. den Weg, der die größtmögliche Eigenzeit ergibt.

Ist die „Schwere“ eine Illusion?



Im freischwebenden Bezugssystem bewegt sich der Ball entlang einer Geraden, im fest im Gravitationsfeld verankerten Bezugssystem dagegen entlang einer Wurfparabel.

Der Freie Fall ist eine Illusion. Jeder nicht beschleunigte Körper bewegt sich entlang einer Geodäten durch die Raumzeit. Die Gravitation wird nur dadurch „vorgetäuscht“, dass man sich in einem besonderen, nicht-frei fallenden Bezugssystem (z.B. der Erdoberfläche) befindet.

Kurzfilm: Die Schönheit der Geodäten

Einsteinsche Feldgleichungen und ihre Lösungen

Die Beschleunigung, die wir relativ zu den nicht-frei fallenden Bezugssystem erfahren, hängt von der lokalen Krümmung der Raum-Zeit ab.

- keine Krümmung – keine Beschleunigung – keine Gravitation
- schwache Krümmung – geringe Beschleunigung – geringe Gravitation
- starke Krümmung – starke Beschleunigung – starke Gravitation

Frage: Was krümmt die Raum-Zeit?

Antwort (Einstein 1916): Die Krümmung wird durch die lokale Energie- und Impulsdichte verursacht.
(vereinfacht ausgesprochen, Massen und Masseströmungen krümmen die Raum-Zeit)

Beschrieben durch die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation

Einsteinsche Gravitationsfeldgleichungen

Formulierung des Phänomens der Gravitation mit den Mitteln der Differenzialgeometrie.

Die Grundidee ist dabei die Verknüpfung einer Energie-Impuls-Verteilung mit der Geometrie der Raumzeit

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik}$$

= 16 part. Differenzialgleichungen
→ wegen Symmetrie 10 Gleichungen

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = \boxed{-8\pi \frac{G}{c^4}} \mathbf{T}$$

Kurzform

Einsteinsche Gravitationskonstante

Kosmologisches Glied

Die Raumzeit wirkt auf die Masse (Energie), indem sie ihr sagt, wie sie sich bewegen soll; die Masse (Energie) wirkt umgekehrt auf die Raumzeit, indem sie ihr sagt, wie sie sich krümmen soll.

Was bedeutet „Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen“ ?

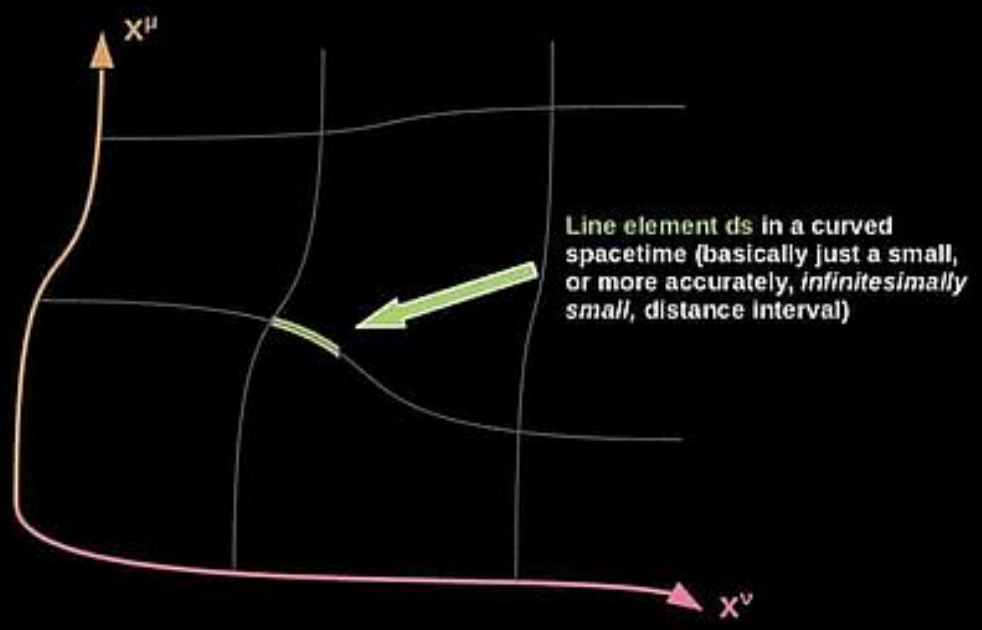
→ Eine Gleichung ist dann erfüllt, wenn die rechte und die linke Seite identisch ist.

Gegeben: Masse- (Energie) und Impulsverteilung in einem Raumgebiet

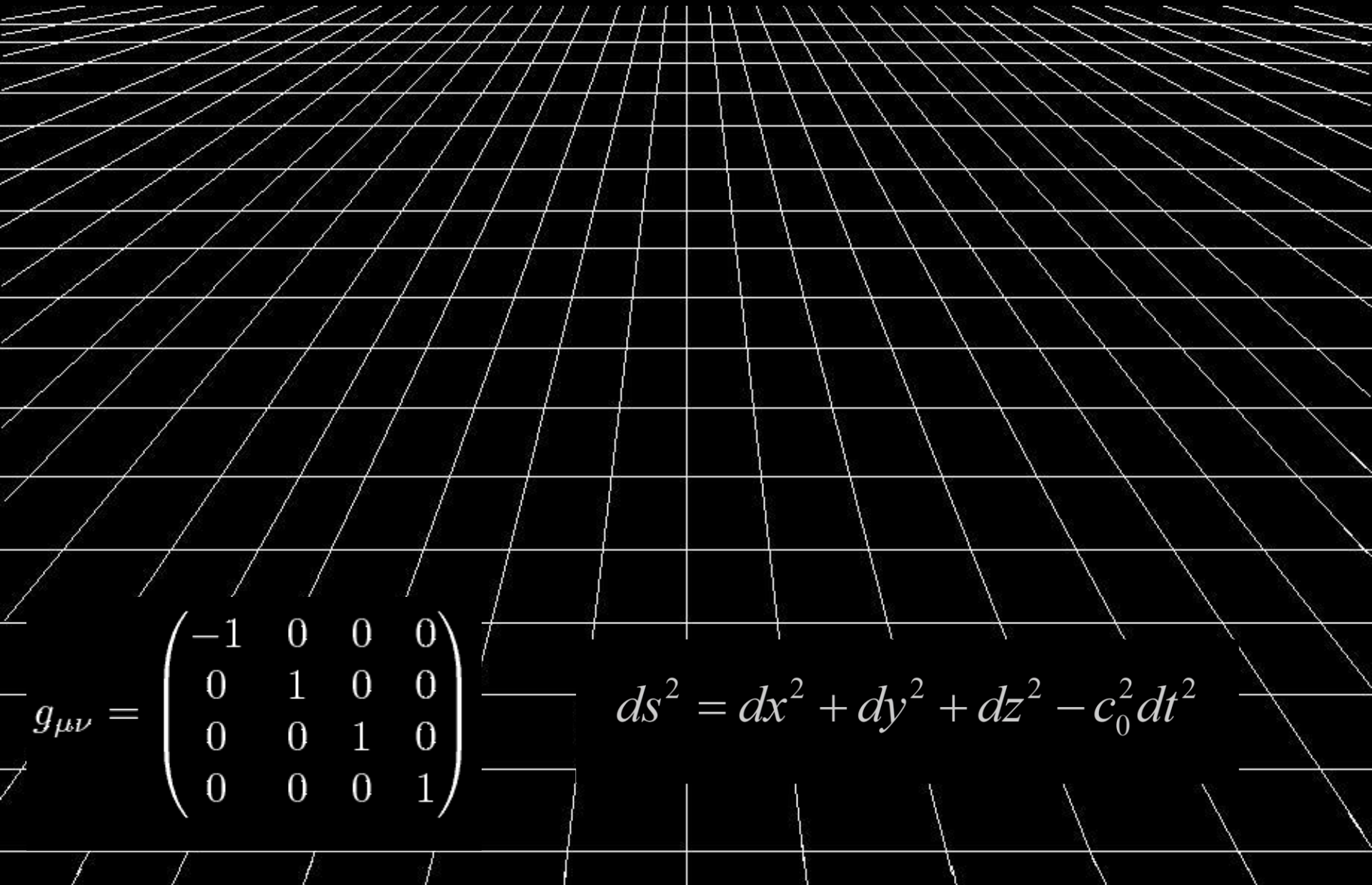
Lösung: Krümmung der Raum-Zeit in diesem Raumgebiet

Die Lösung wird gewöhnlich in Form einer **Metrik** angegeben, d.h. man berechnet die Größe der einzelnen Komponenten des Metrischen Tensors **g**

Der **Metrische Tensor** bestimmt das **Linienelement** *ds* (die Metrik) in diesem Raumbereich. Deshalb wird gewöhnlich die Metrik, welche die Einsteinschen Feldgleichungen für eine gegebene Masseverteilung genügt, als Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.



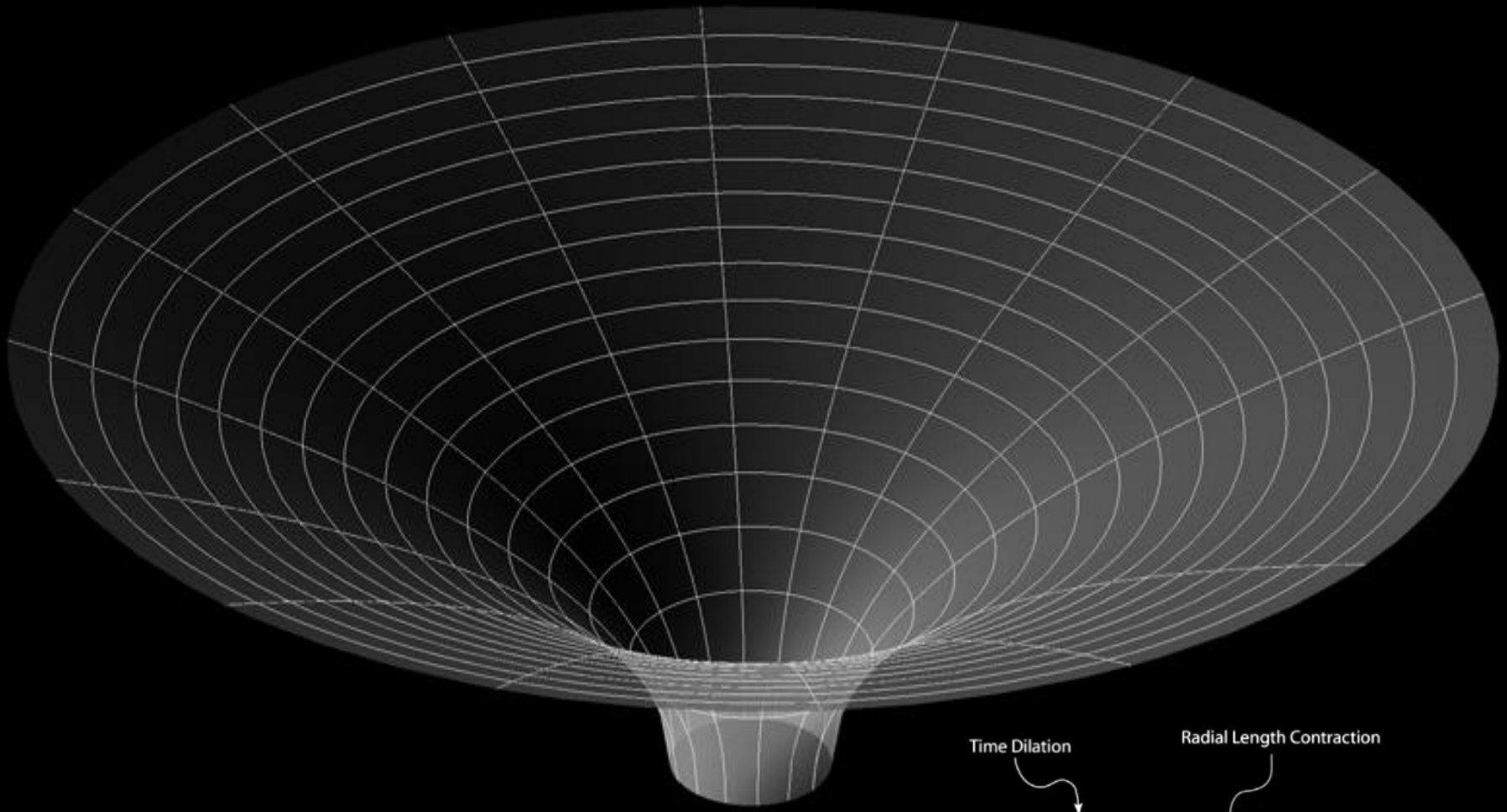
Beispiel: Flache Raum-Zeit (Minkowski-Welt)



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2$$

Beispiel: Äußere Schwarzschild - Raum-Zeit



$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Time Dilation

Radial Length Contraction

$$ds^2 = -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Invariant Line Element

Schwarzschild Radius

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Beispiele für benannte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

Es ist äußerst schwierig, exakte Lösungen zu gewinnen. Deshalb werden heute für von Idealfällen abweichende Konfigurationen numerische Näherungsmethoden verwendet. Exakte Lösungen werden gewöhnlich nach den Personen benannt, die sie gefunden haben.

Beispiele (Sterne, Planeten):

a) ungeladene, nichtrotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (Himmelsmechanik)

Schwarzschild-Lösung (!)

b) ungeladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (realistisches Black hole)

Kerr-Lösung (!)

c) geladene, rotierende kugelsymmetrische Masseverteilung (unrealistisch)

Reissner-Nordström-Lösung

Beispiele (kosmologische Lösungen):

a) materiefreier Raum (Vakuumlösung + kosmologisches Glied)

De Sitter-Lösung + Anti-De Sitter-Lösung

b) kosmischer Raum mit gleichförmig – isotroper Materieverteilung (Standardkosmologie)

Friedman – Robertson – Walker-Lösung (!)

c) Modelle mit positiver kosmologischer Konstante

Eddington - Lemaitre-Lösung

d) Lösung mit Anfangsinflation (inflationäres Weltmodell)

Inflationäres Weltmodell (!)

e) Rotierendes Universum

Gödel-Kosmos

Die „Entdeckung“ der „Schwarzen Löcher“

Die Hypothese, dass es Sterne gibt, von denen keine Strahlung in den kosmischen Raum emittiert werden kann, geht auf den Begründer der Seismologie **John Michell** (1783) zurück und wurde später (1795) durch **Pierre de Laplace** theoretisch im Rahmen der Newtonschen Mechanik begründet.

Frage:
Ab welcher Sternmasse wird die Fluchtgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit?

Antwort:
Ein Stern, der 500x so groß ist wie die Sonne, erfüllt diese Bedingung

Pierre de Laplace : Die größten Sterne werden für immer unsichtbar bleiben …

Auch in der Newtonschen Mechanik gibt es das theoretische Konstrukt von Schwarzen Löchern.

Gravitationsfeld einer statischen kugelsymmetrischen Masse

1916: Albert Einstein veröffentlicht die korrekten Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im gleichen Jahr findet der deutsche Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) eine der ersten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für eine statische, kugelsymmetrische Masseverteilung.

- **Äußere Schwarzschild-Lösung** (äußeres Gravitationsfeld eines Sterns)
- **Innere Schwarzschildlösung** (Gravitationsfeld im Inneren eines Sterns)

Die **äußere Schwarzschild-Lösung** beschreibt die Raum-Zeit-Krümmung im Außenraum einer nichtrotierenden, ungeladenen kugelsymmetrischen Massenverteilung und ersetzt im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie das Newton'sche Gravitationsgesetz.

Ein „Objekt" **SCHWARZES LOCH** wurde aber damals nicht diskutiert...

Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der EINSTEINschen Theorie.

Von K. SCHWARZSCHILD.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

§ 1. Hr. EINSTEIN hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\left.\begin{aligned} &\delta\int ds = 0, \\ &\text{wobei} \\ &ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu} \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ist, $g_{\mu\nu}$ Funktionen der Variabeln x bedeuten und bei der Variation am Anfang und Ende des Integrationswegs die Variablen x festzuhalten sind. Der Punkt bewege sich also, kurz gesagt, auf einer geodätischen Linie in der durch das Linienelement ds charakterisierten Mannigfaltigkeit.

Die Ausführung der Variation ergibt die Bewegungsgleichungen des Punktes

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \quad \alpha,\beta = 1,2,3,4 \qquad (2)$$

wobei

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)$$

Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der EINSTEINschen Theorie.

Von K. SCHWARZSCHILD.

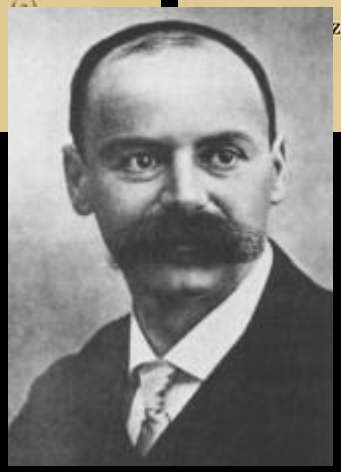
(Vorgelegt am 24. Februar 1916 [s. oben S. 313].)

§ 1. Als ein weiteres Beispiel zur EINSTEINschen Gravitationstheorie habe ich das Gravitationsfeld einer homogenen Kugel von endlichem Radius, die aus inkompressibler Flüssigkeit besteht, berechnet. Der Zusatz »aus inkompressibler Flüssigkeit« ist erforderlich, weil in der Relativitätstheorie die Gravitation nicht nur von der Menge der Materie, sondern auch von deren Energie abhängt und z. B. ein fester Körper von bestimmtem Spannungszustand eine andere Gravitation geben würde als eine Flüssigkeit.

Die Rechnung bildet eine unmittelbare Fortsetzung meiner Mitteilung über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes (diese Sitzungsberichte 1916, S. 189), welche ich kurz mit »Massenpunkt« zitieren werde.

§ 2. Die EINSTEINschen Feldgleichungen der Gravitation (diese Sitzungsber. 1915, S. 845) lauten allgemein:

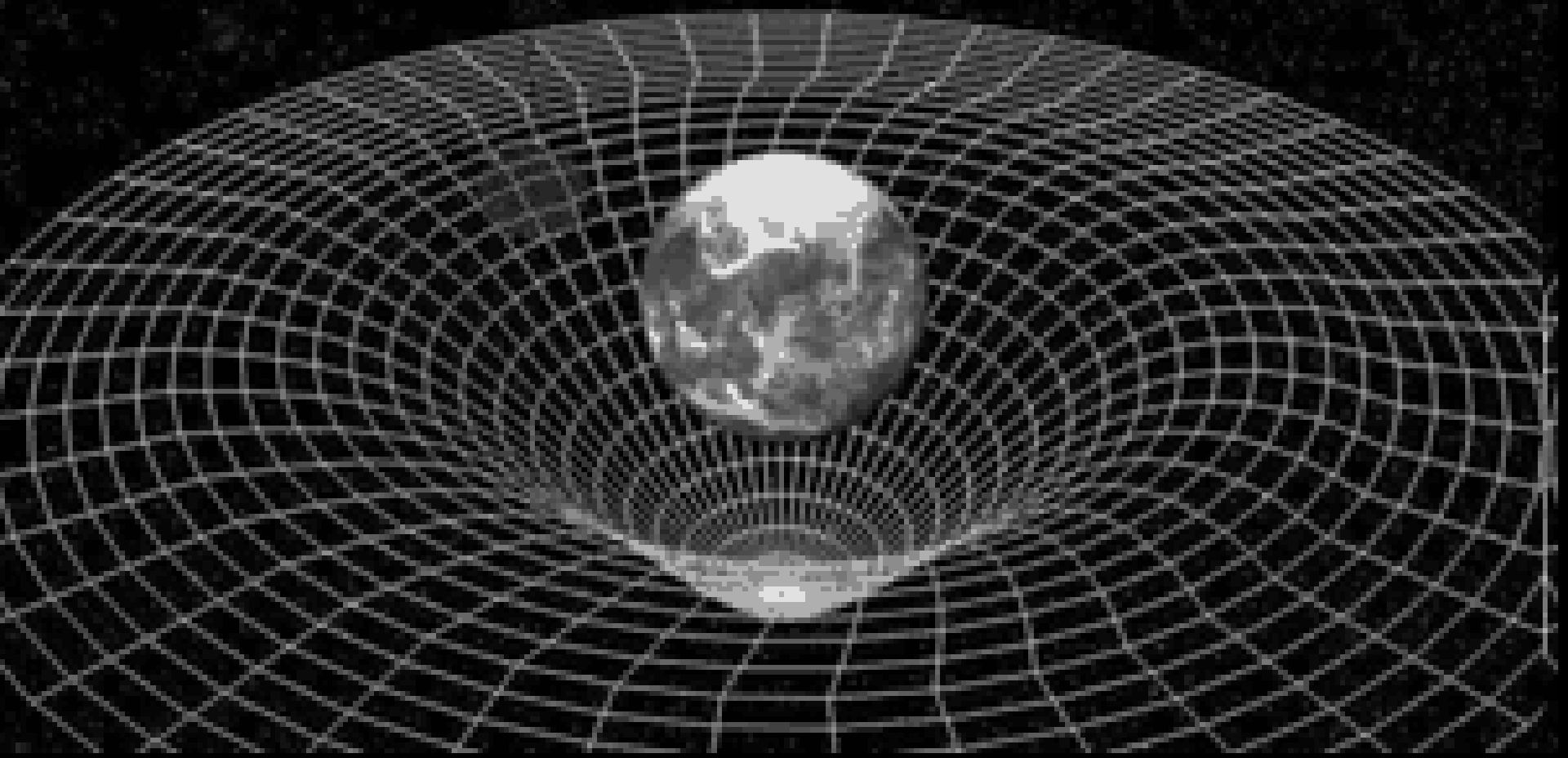
$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = G_{\mu\nu}. \qquad (1)$$



Schwarze Löcher
Allgemeinrelativistische Himmelsmechanik

Neutronensterne

Äußere Schwarzschildlösung



$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\phi^2 - \left(1-\frac{2GM}{r\,c^2}\right)c^2\,dt^2$$

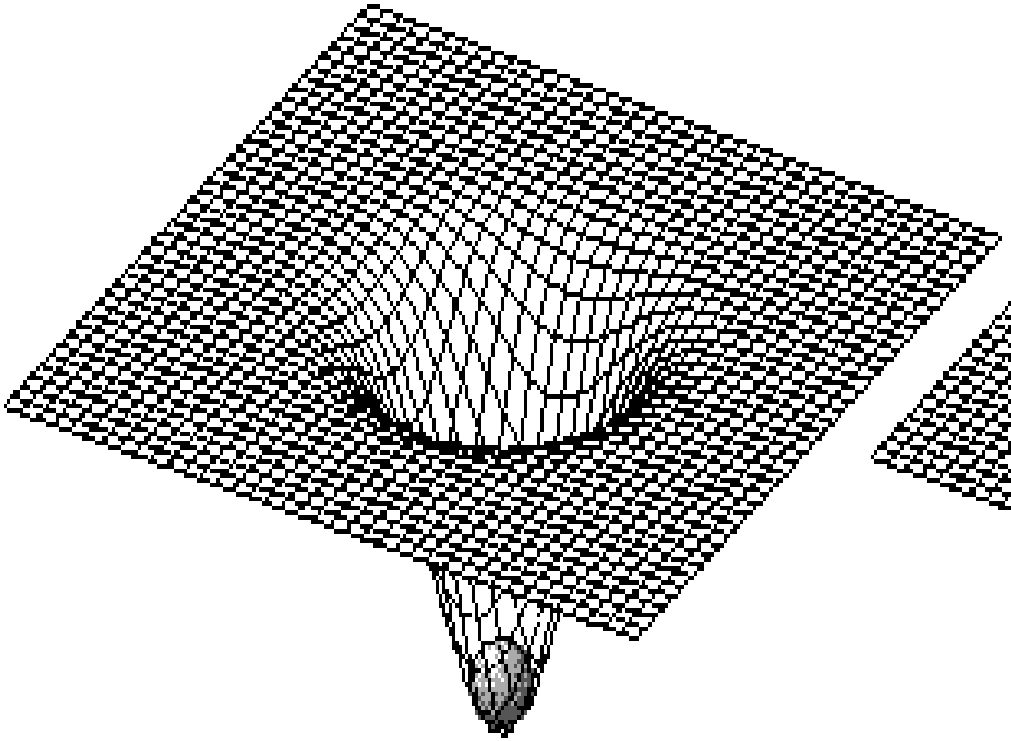
Der Schwarzschild-Radius

$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\phi^2 - \left(1-\frac{2GM}{r\,c^2}\right)c^2\,dt^2$$

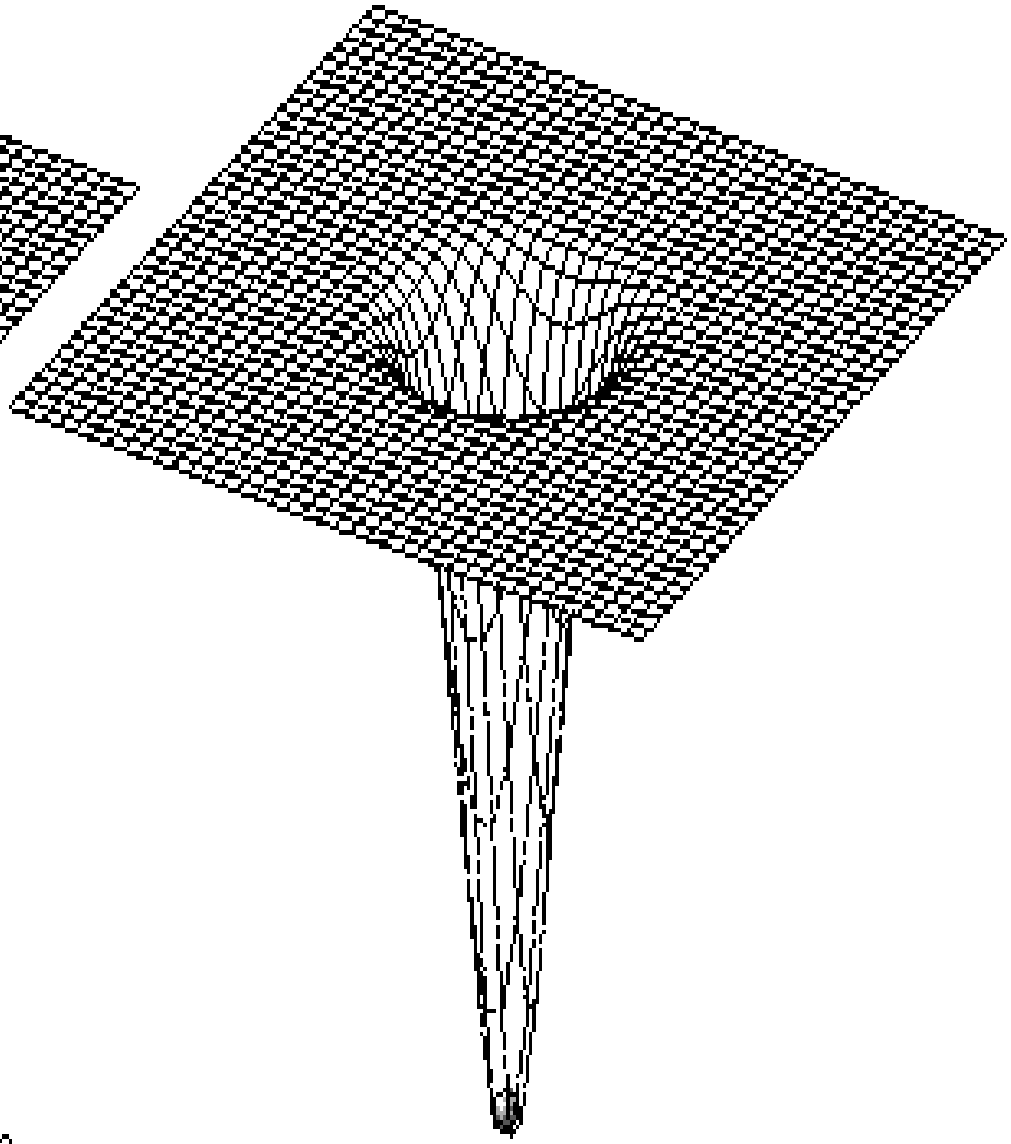
Wenn $r = \frac{2GM}{c^2}$ wird der metrische Koeffizient $g_{rr} = \frac{1}{1-\frac{2GM}{r\,c^2}}$ singulär.

$$r_s = \frac{2\,GM}{c^2}$$

Schwarzschild-Radius



Usual star



Neutron star

General Relativity :

Einstein describes gravity as a deformation of space-time around a massive object.

nrumiano

Singularitäten in der Schwarzschild-Metrik

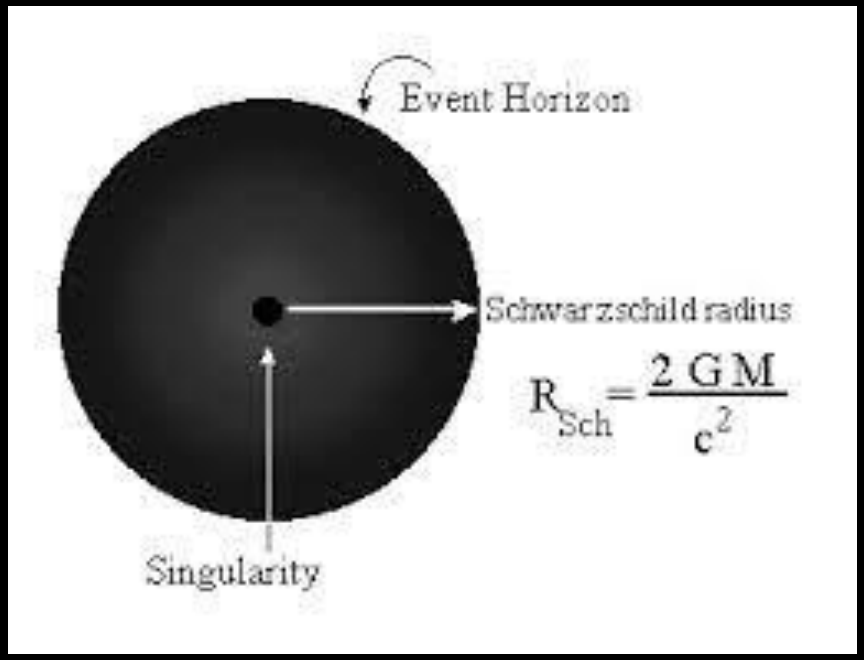
Wie Eddington und Finkelstein zeigen konnten, handelt es sich bei der Singularität bei $r = r_s$ um eine „hebbare“ Singularität, die nur von der Wahl des Koordinatensystems (hier Kugelkoordinaten) abhängt. Die Singularität bei r=0 ist dagegen „echt“ und kann nicht wegtransformiert werden.

Da die Größe r_s sehr klein ist und die Singularität der Metrik an dieser Stelle behoben werden kann, gab es keine Veranlassung, für den Schwarzschildradius eine physikalische Interpretation einzuführen. Alle Himmelskörper, die bis dahin bekannt waren, hatten Radien weit oberhalb ihres Schwarzschildradius.

Für Einstein und Co. waren das, was man später einmal „Schwarze Löcher“ nennen wird, kein Thema!

Kurze (relativistische) Phänomenologie statischer Schwarzer Löcher

Eine wesentliche Kenngröße eines Schwarzschild-Lochs ist der Radius seines Ereignishorizontes → SCHWARZSCHILD-RADIUS



OBJEKT	MASSE	S-Radius
Planck-Masse	2.18×10^{-8} kg	3.23×10^{-35} m
Mensch	70 kg	1.04×10^{-25} m
Erde	5.97×10^{24} kg	8.87×10^{-3} m
Sonne	1.99×10^{30} kg	2.95×10^{3} m
BH Milchstraße	8.2×10^{36} kg	0.08 AU
TON 618	1.3×10^{41} kg	~1300 AU
Universum	8.8×10^{52} kg	13.7 Millarden Lj.

46,4 Milliarden Lj.

Der Schwarzschild-Radius hängt nur von der Masse eines Objekts ab (d. h. er kann als Synonym für dessen gravitativ wirkende Masse verwendet werden.

→ **Gravitationsradius einer Masse**

Die durch die Koordinatensingularität der Schwarzschild-Metrik ausgezeichnete 2d-Hyperfläche mit dem Radius = Schwarzschildradius um eine kollabierte Masse („Schwarzes Loch“) bezeichnet man als „Ereignishorizont“.

Der Ereignishorizont stellt eine geschlossene Fläche im Raum dar, die Ereignisse, die sich innerhalb dieser Fläche ereignen, kausal von Ereignissen, die sich außerhalb dieser Fläche ereignen, trennt.

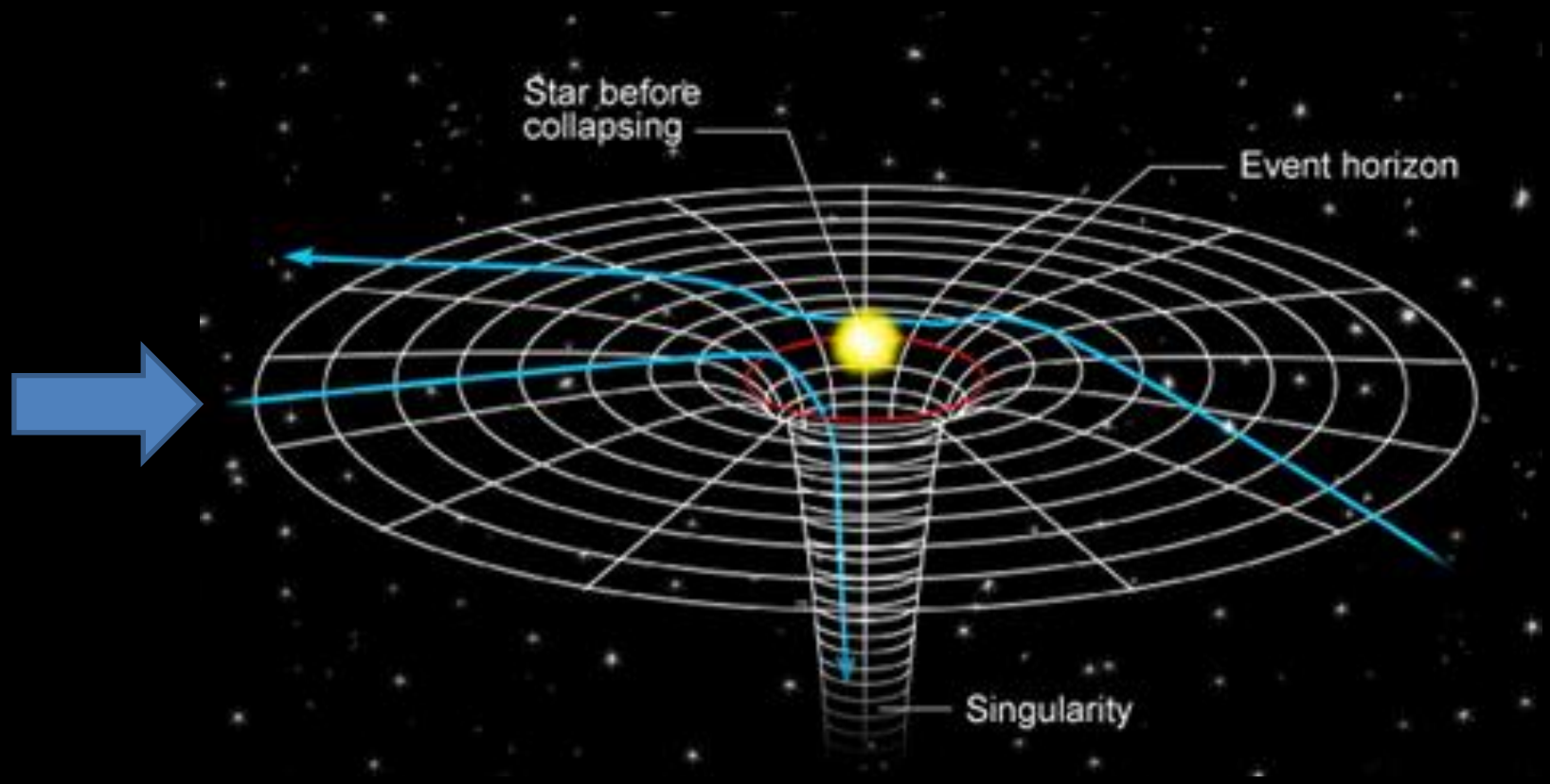
d. h. es gibt keine Möglichkeit für einen Beobachter innerhalb des Ereignishorizonts Ereignisse außerhalb dessen zu beeinflussen oder zu induzieren – umgekehrt ist das durchaus möglich.

→ „Halbdurchlässige Membran für Informationen“

- Die Fläche des Ereignishorizonts ist entweder konstant oder kann (durch Masseeinfall) nur anwachsen.
- Der Ereignishorizont ist keine gegenständliche Grenze. Ein frei fallender Beobachter kann daher nicht direkt feststellen, wann er den Ereignishorizont passiert.

Freier Fall in ein Schwarzschild-Black hole

→ Bewegung entlang einer radialen Geodäte



Zwei Bezugssysteme:

a) **frei fallender Beobachter**

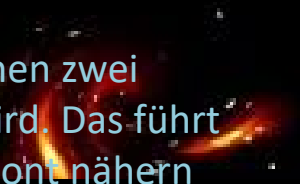
- Bewegt sich beschleunigt radial in Richtung Zentrum des Black holes und erreicht es in endlicher Eigenzeit (das ist die Zeit, die seine Armbanduhr anzeigt).

- Er bemerkt beim „Durchfliegen“ des Ereignishorizonts keine Besonderheiten, außer dass er prinzipiell nicht mehr in der Lage ist (wie auch immer) umzukehren…

- Mit Annäherung an die Singularität nehmen die Gezeitenkräfte immer mehr zu („Spaghettisierung der Materie“)

b) **weit entfernter Beobachter**

- Er beobachtet, wie mit Annäherung an den Ereignishorizont der Abstand zwischen zwei Sekundenschlägen auf der Uhr des frei fallenden Beobachters immer größer wird. Das führt dazu, dass er den frei fallenden Beobachter sich asymptotisch den Ereignishorizont nähern sieht, ohne dass er ihn in endlicher Zeit (gemessen auf der Uhr des entfernten Beobachters) jemals erreicht. Der Fall in das Black hole dauert unendlich lange…



- Damit ist auch ein Intensitätsverlust (Gravitations-Rotverschiebung) verbunden, der es unmöglich macht, den fallenden Beobachter bis zum Ereignishorizont zu verfolgen, da er bereits davor unsichtbar wird. Am Ereignishorizont wird die Gravitationsrotverschiebung unendlich groß.

Radial frei fallende Beobachter

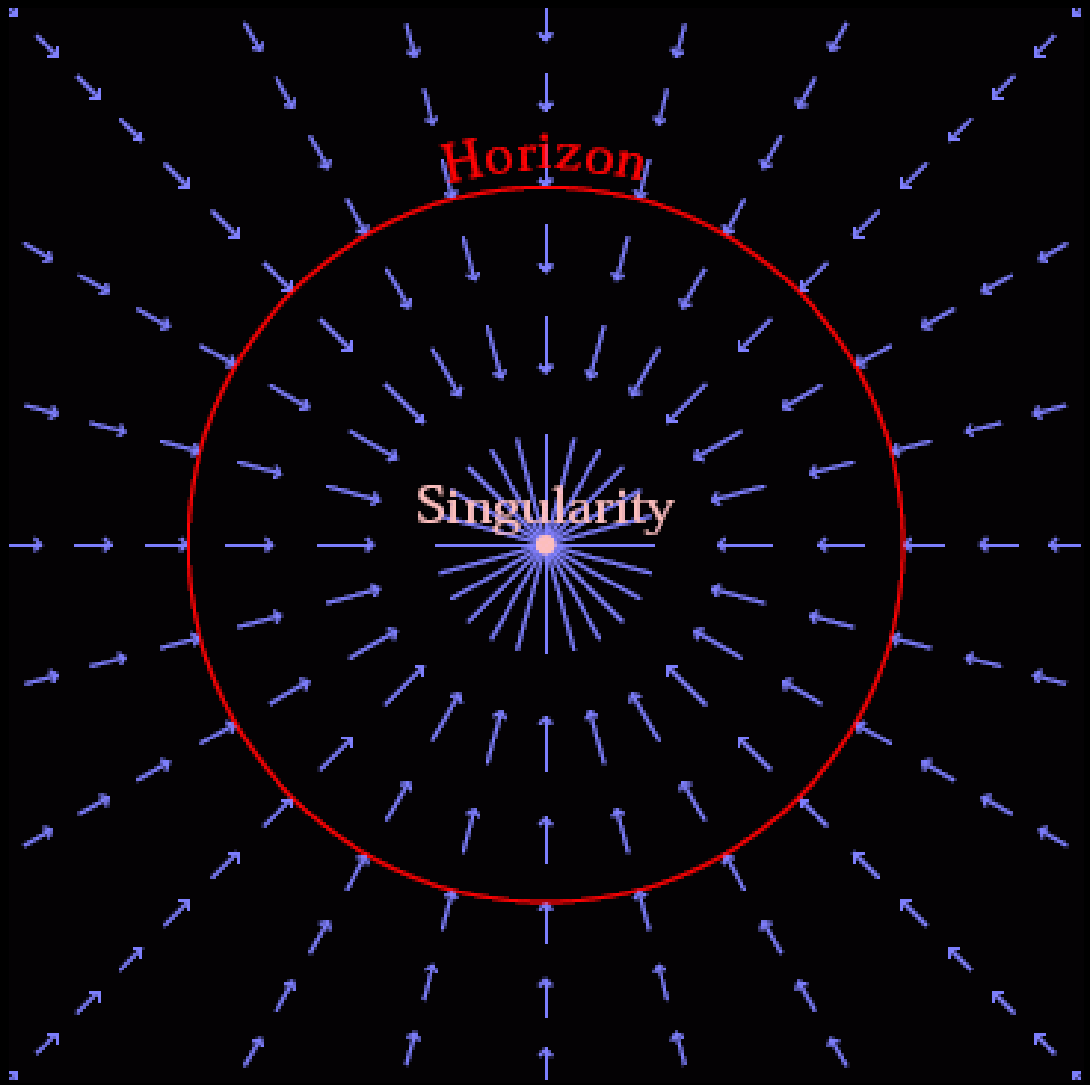
$$v = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

„Newtonsche“ Fallgeschwindigkeit

Galaktisches Black hole
= 5 Millionen Sonnenmassen

Fallzeit (Eigenzeit des frei fallenden Beobachters) vom Schwarzschild-Horizont bis zur Singularität (0,08 AU):

16 Sekunden



Gullstrand-Painlevé Metrik

Die Zentralsingularität

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die gesamte Masse eines Schwarzschild-Black holes in einem (unendlich) kleinen Punkt in dessen Zentrum konzentriert (= Ort unendlich großer Krümmung; „Zusammenbruch der Physik“)

→ **ZENTRALSINGULARITÄT** (Massendichte geht gegen Unendlich)

Hawking-Penrose-Theorem:
Die Zentralsingularität lässt sich im Rahmen der ART prinzipiell nicht vermeiden

Ein Black hole ist deshalb auch kein „Stern“, sondern nur eine Anomalie der RaumZeit!

Die Zentralsingularität eines Schwarzschild-Lochs ist für einen äußeren Beobachter verborgen (d. h. nicht sichtbar) → **Cosmic Censorship – Hypothese** (Roger Penrose)

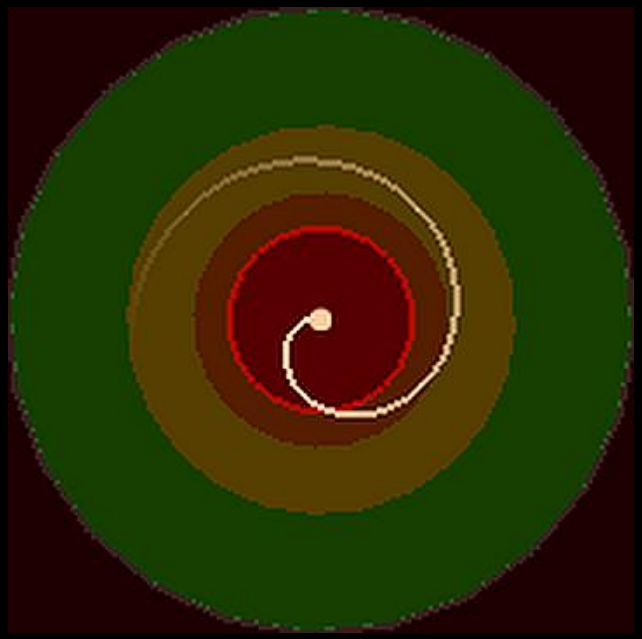
Die Masse M ist der einzige Parameter eines statischen Schwarzschild-Lochs. Sie kann nur anwachsen. (II. Hauptsatz der Physik Schwarzer Löcher)

Eine Punktsingularität mit unendlich hoher Dichte ist unphysikalisch. Sie lässt sich aber nur durch eine modifizierte ART vermeiden, will man in der klassischen Theorie (d. h. ohne die Berücksichtigung von Quanteneffekten) bleiben. Eine Theorie, die das leistet, stammt von Walter Greiner, ist aber umstritten und auch nicht falsifizierbar.

Das Singularitätenproblem lässt sich wahrscheinlich nur im Rahmen der Quantengravitation lösen. Dafür gibt es aber nur eine Vielzahl theoretischer Ansätze weitab experimenteller Überprüfbarkeit. Eine Vereinigung von ART und QM ist extrem schwierig, da sich die theoretischen Ansätze (hier Geometrie einer gekrümmten Raum-Zeit – da relativistische Quantenfeldtheorie) methodisch vollkommen unterscheiden.

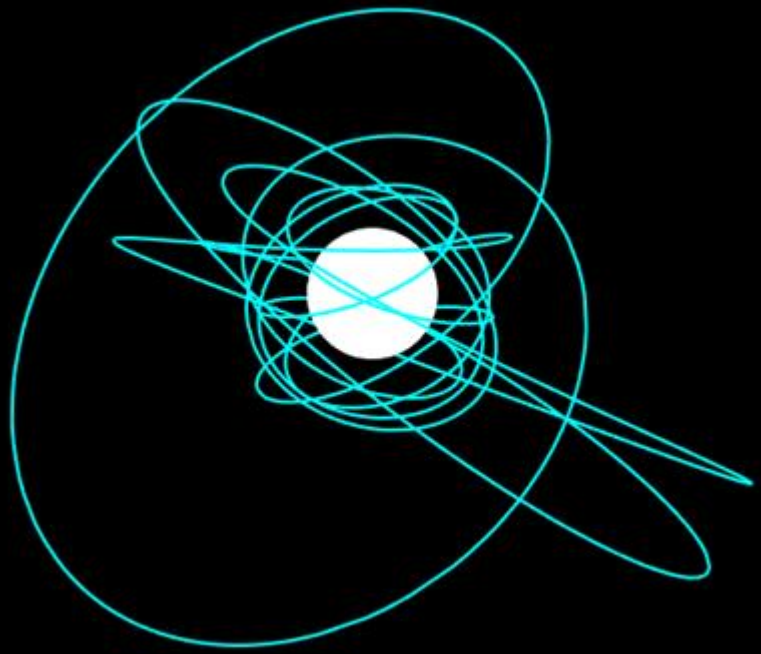
→ partielle Ansätze: Thermodynamik Schwarzer Löcher (Hawking-Effekt, Entropie)

Teilchenbahnen um Schwarzschild-Löcher

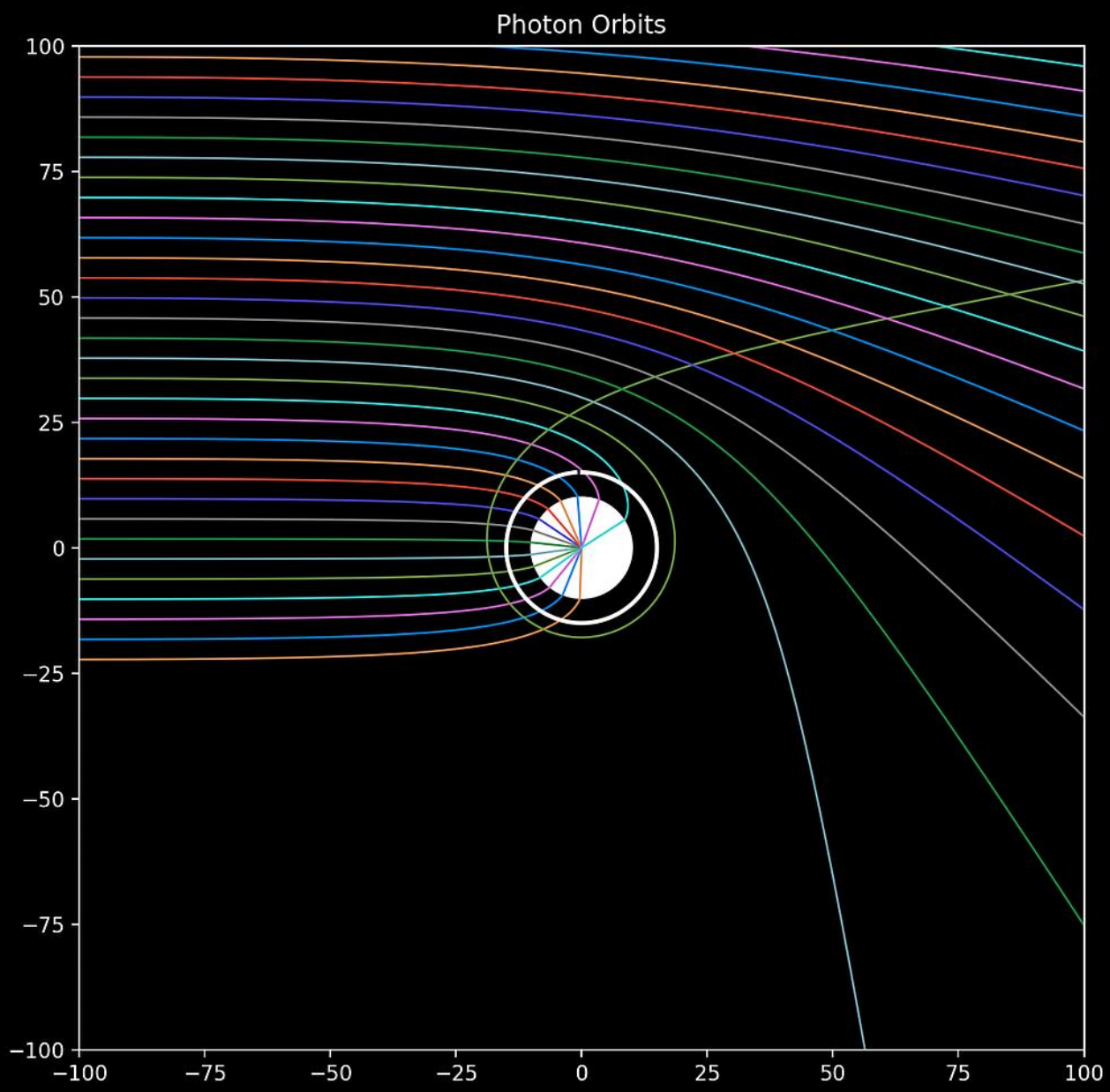


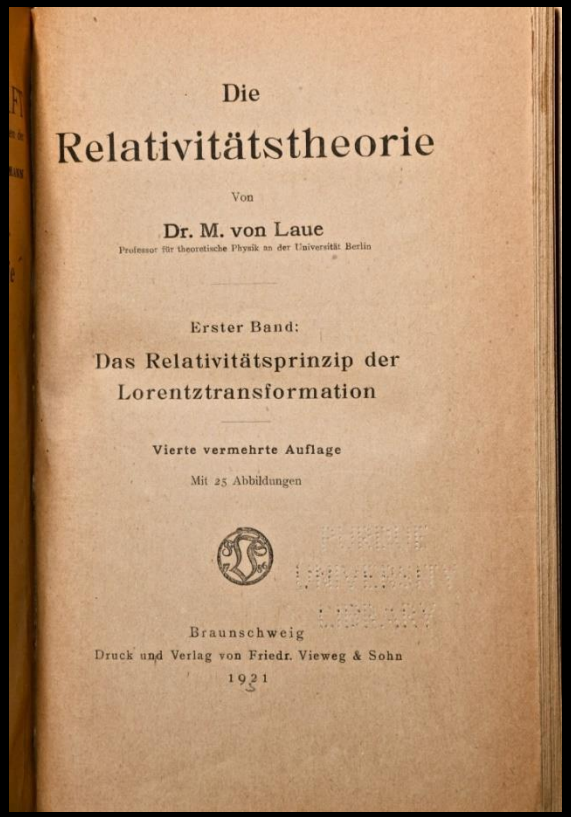
Farbe	Zone
Grün	Stabile Kreisbahnen
Gelb	Instabile Kreisbahnen
Orange	Keine Kreisbahnen
rote Linie	Horizont
rot	Hinter dem Horizont

Kreisbahnen um ein Black hole



Photonenbahnen um Schwarzschild-Löcher




Die
Relativitätstheorie
Von
Dr. M. von Laue
Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin
Erster Band:
Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation
Vierte vermehrte Auflage
Mit 25 Abbildungen
Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1921

$$r_{Ph} = \frac{3GM}{c^2}$$

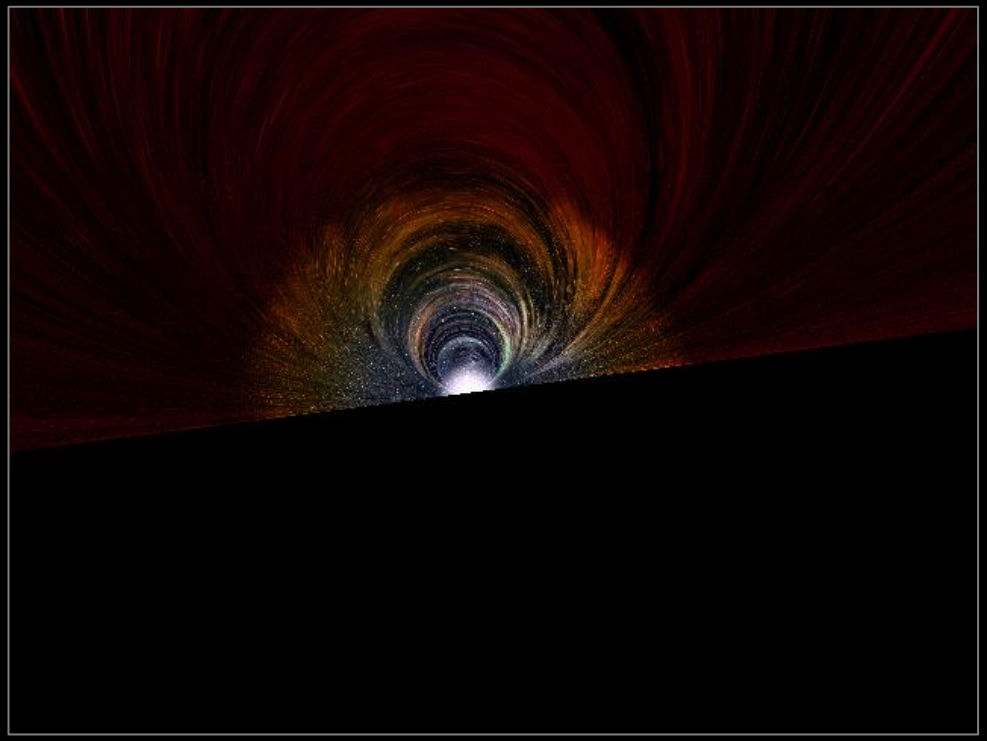
Bedingung für kreisförmige Photonenbahnen

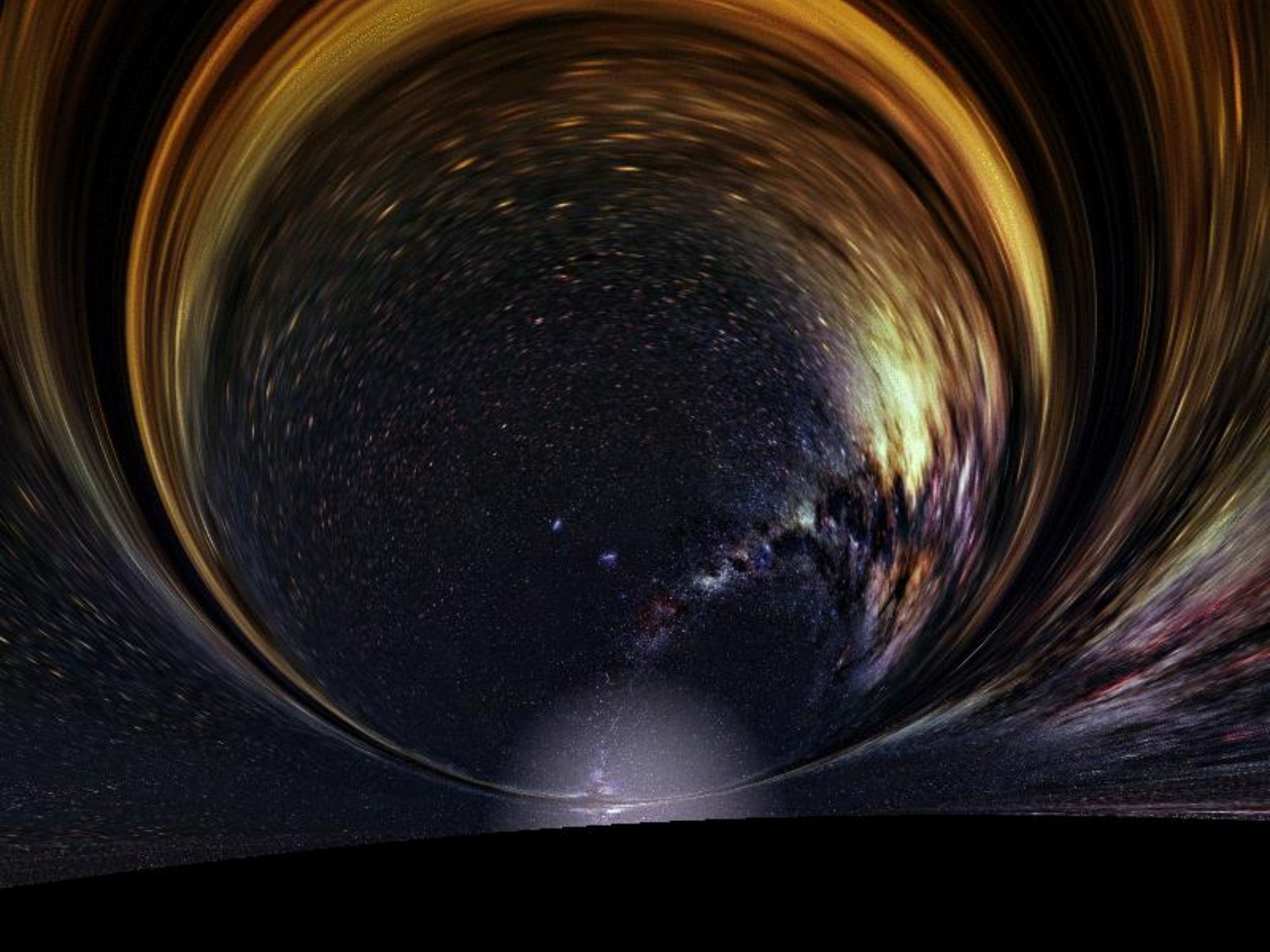
Die Photonensphäre

Als **Photonensphäre** bezeichnet man die Fläche um ein Schwarzes Loch, auf der alle instabilen Photonenorbits liegen.

Wenn man von einem Ort der Photonensphäre nach außen blickt, würde der halbe Himmel völlig schwarz erscheinen, die andere Hälfte wäre relativ hell, und was sich hinter dem Kopf befindet, würde in der Mitte erscheinen.

Himmelsansicht
50% außerhalb des Ereignishorizonts





Kurze (relativistische) Phänomenologie rotierender Schwarzer Löcher

Metriken für Schwarze Löcher

	statisch $(J = 0)$	rotierend $(J \neq 0)$
ungeladen $(Q = 0)$	Schwarzschild-Metrik	**Kerr-Metrik**
geladen $(Q \neq 0)$	Reissner-Nordström-Metrik	Kerr-Newman-Metrik
Q: Elektrische Ladung; J: Drehimpuls		

Da Ladungen während eines Gravitationskollaps „abgestrahlt“ werden, der Drehimpuls (Rotation) aber erhalten bleibt, sind nur ungeladene, rotierende Schwarze Löcher in der Natur realisiert.

KERR-LOCH

(Nach dem neuseeländischen Mathematiker Roy Kerr, der 1963 die „Kerr-Lösung“ fand)

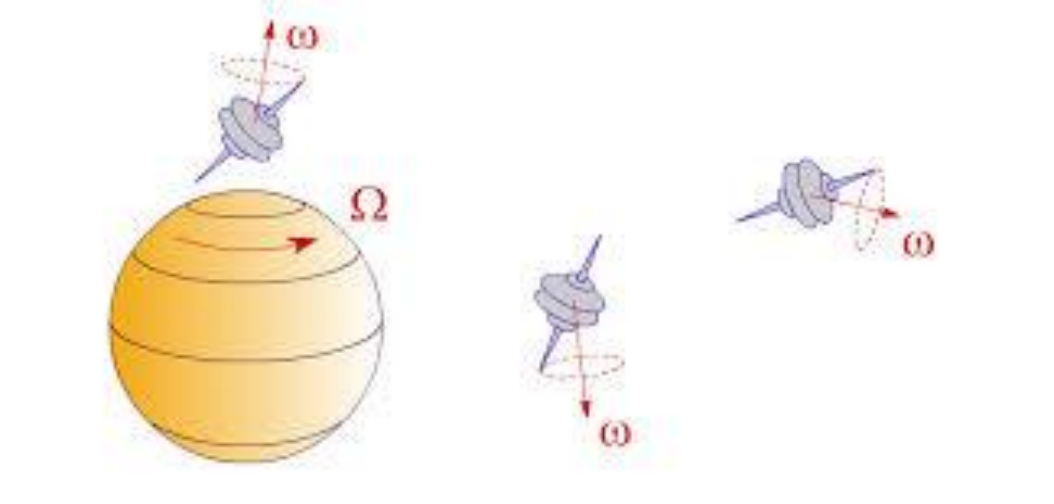
Bei einem **rotierenden Schwarzen Loch** rotiert die „Raumzeit“ selbst und führt alles, was in dessen Umgebung materiell eingebettet ist, mit sich mit, d. h. jedes Teilchen wird in dessen Umgebung in eine Rotationsbewegung um das Black hole herum gezwungen und zwar so, dass es die gleiche Winkelgeschwindigkeit annimmt wie der Raumpunkt, in dem es sich befindet.

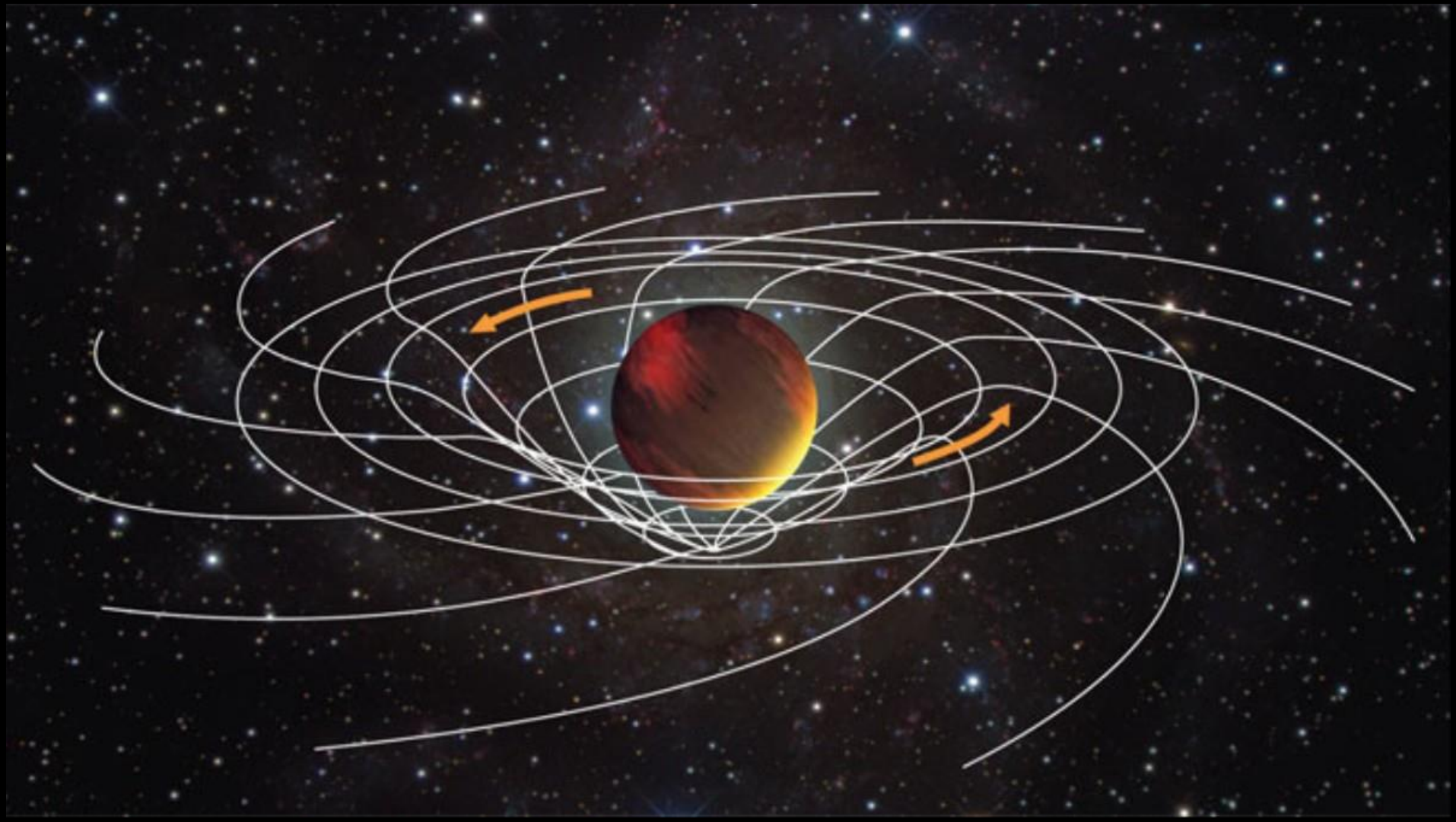
→ Frame-Dragging

Das Frame-Dragging beschreibt den Einfluss einer rotierenden Masse auf ein lokales Inertialsystem in dessen Nähe. Der Effekt wurde bereits 1918 von Josef Lense (1890-1985) und Hans Thirring (1888-1976) theoretisch vorhergesagt.

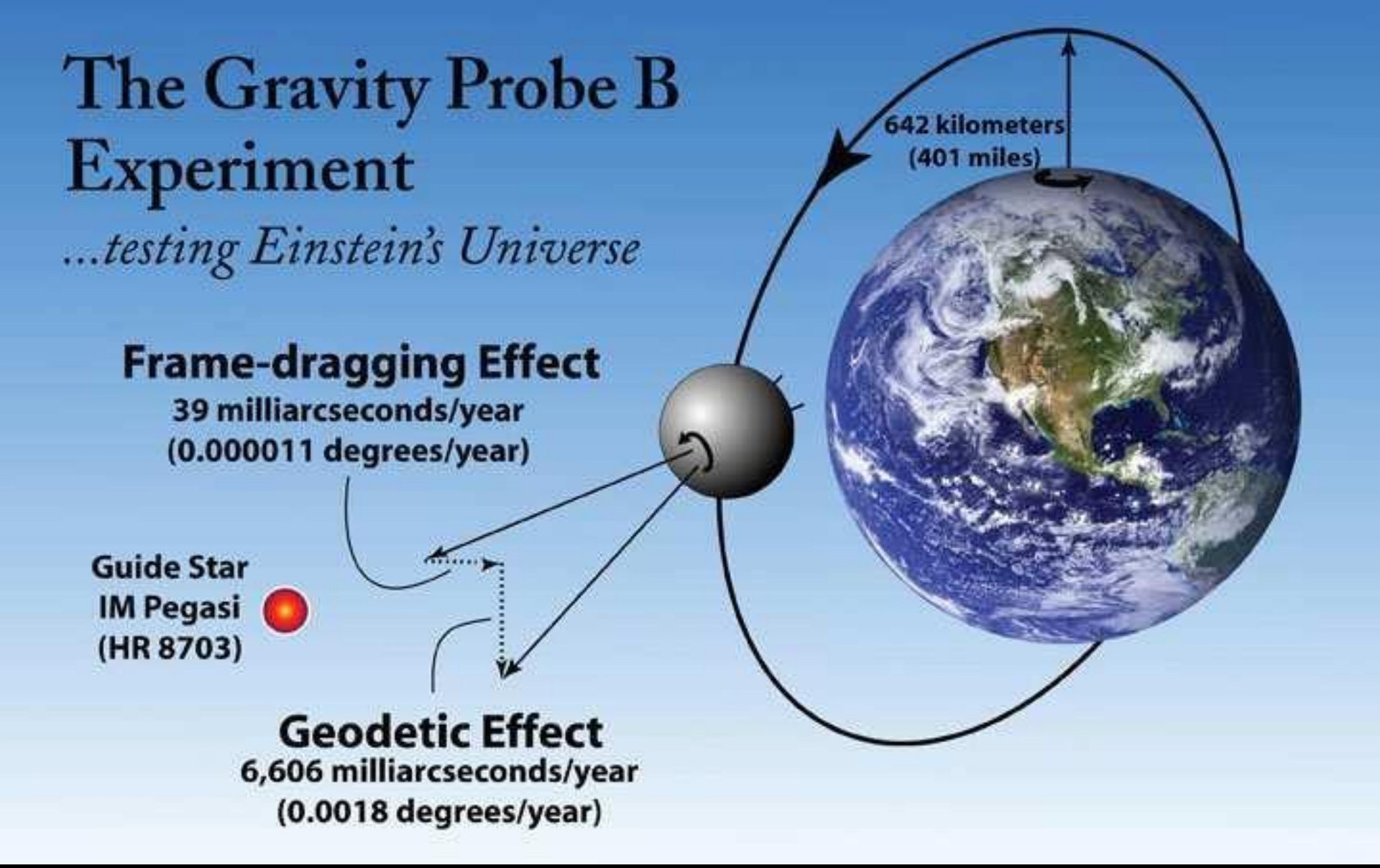
→ Lense-Thirring-Effekt

Rotierende Probekörper beginnen in der Nähe einer großen rotierenden Masse zu präzedieren…





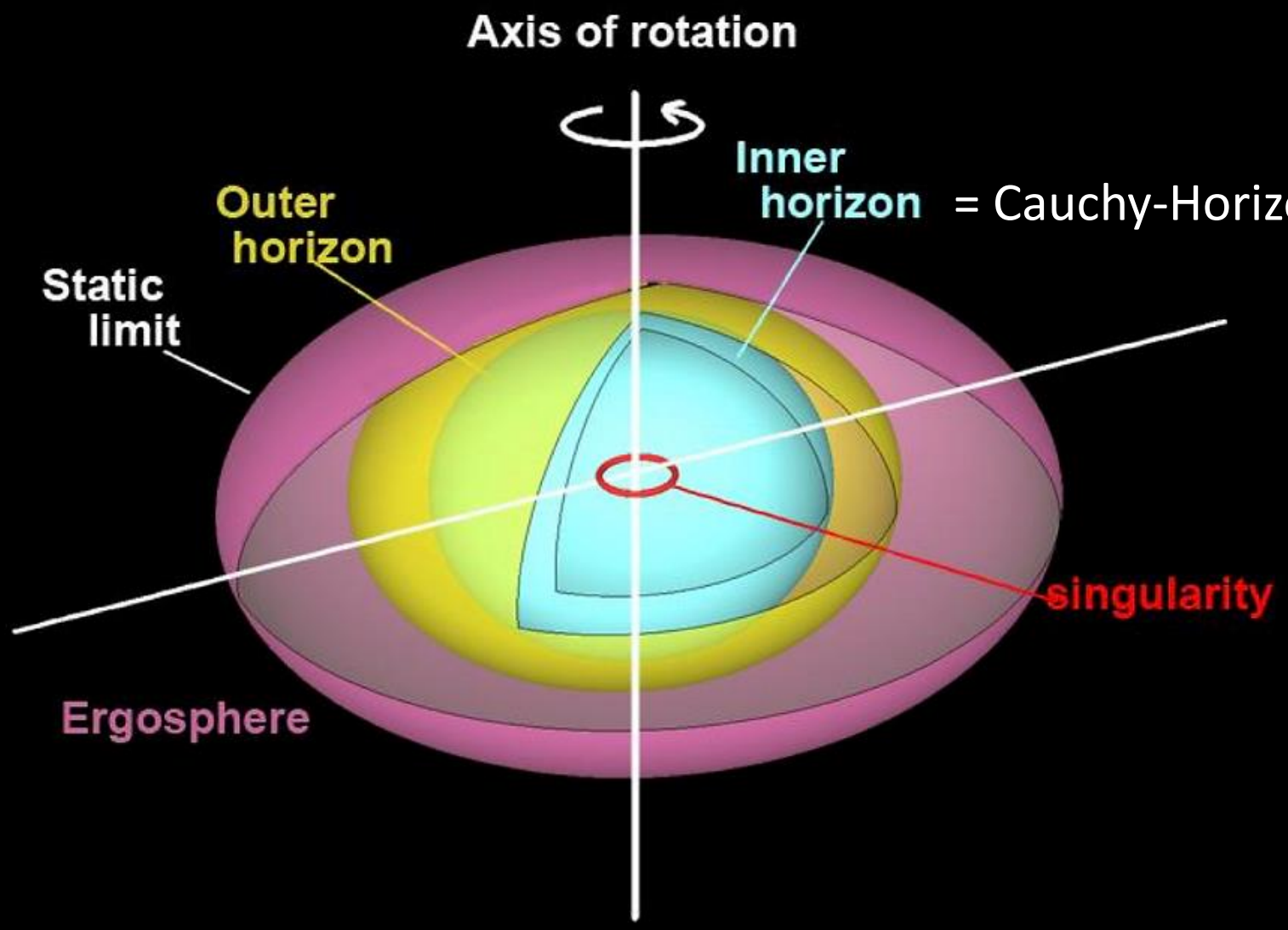
Beim **Frame-Dragging** wird die Bahn eines Teilchen gewissermaßen von der Raumzeit „mitgezogen“ und so dessen Bahn modifiziert. Bei einem Kerr-Black hole wird dadurch dessen Freifall-Zeit (Eigenzeit) verlängert, was Auswirkungen auf die Struktur einer das Black hole umgebenden Akkretionsscheibe hat (Stichwort: Leuchtkraft von Quasaren)



Messzeitraum: 2004-2005

Lense-Thirring Effekt konnte im Rahmen der Meßgenauigkeit bestätigt werden

Raum-Zeit-Struktur in der Umgebung eines Kerr-Lochs



Die Lage des Ereignishorizonts = „Äußerer Horizont“ hängt vom Rotationsparameter a ab:

a ist das Verhältnis von Drehimpuls zu Masse und bei einem Schwarzschild-Loch =0

$$r_H = \frac{GM}{c^2}\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right)$$

Dazwischen erstreckt sich die Ergosphäre

$$r_G = \frac{2GM}{c^2}$$

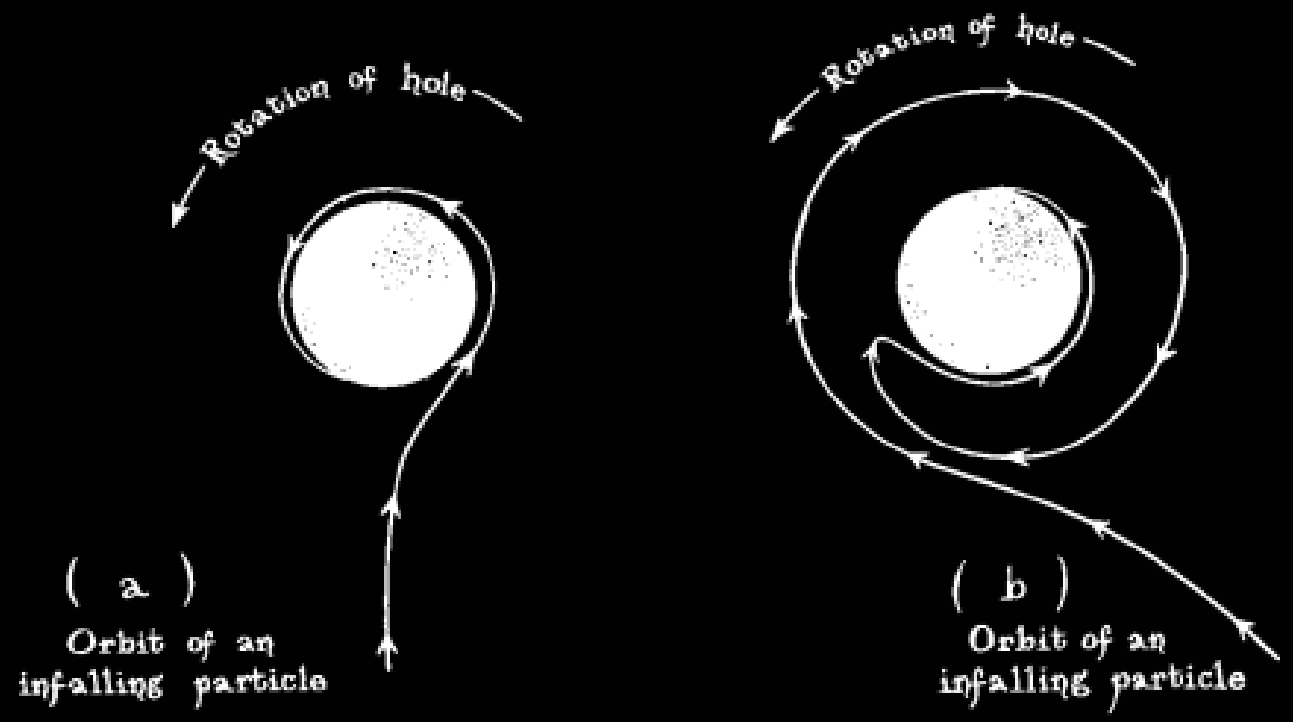
Bei einem Kerr-Loch mit maximal möglichen Drehimpuls (a=1) ist der Radius des Ereignishorizonts nur halb so groß als wie bei einem statischen Schwarzschildloch

Tritt ein Teilchen in die Ergosphäre ein, dann gibt es für dieses Teilchen keine Möglichkeit mehr, gegenüber dem „Fixsternhimmel“ (= Bezugssystem für die Rotation) zu ruhen. Es muss mit dem Kerrloch mitrotieren (*Frame dragging*).

Es kann aber unter gewissen Umständen der Ergosphäre entkommen.

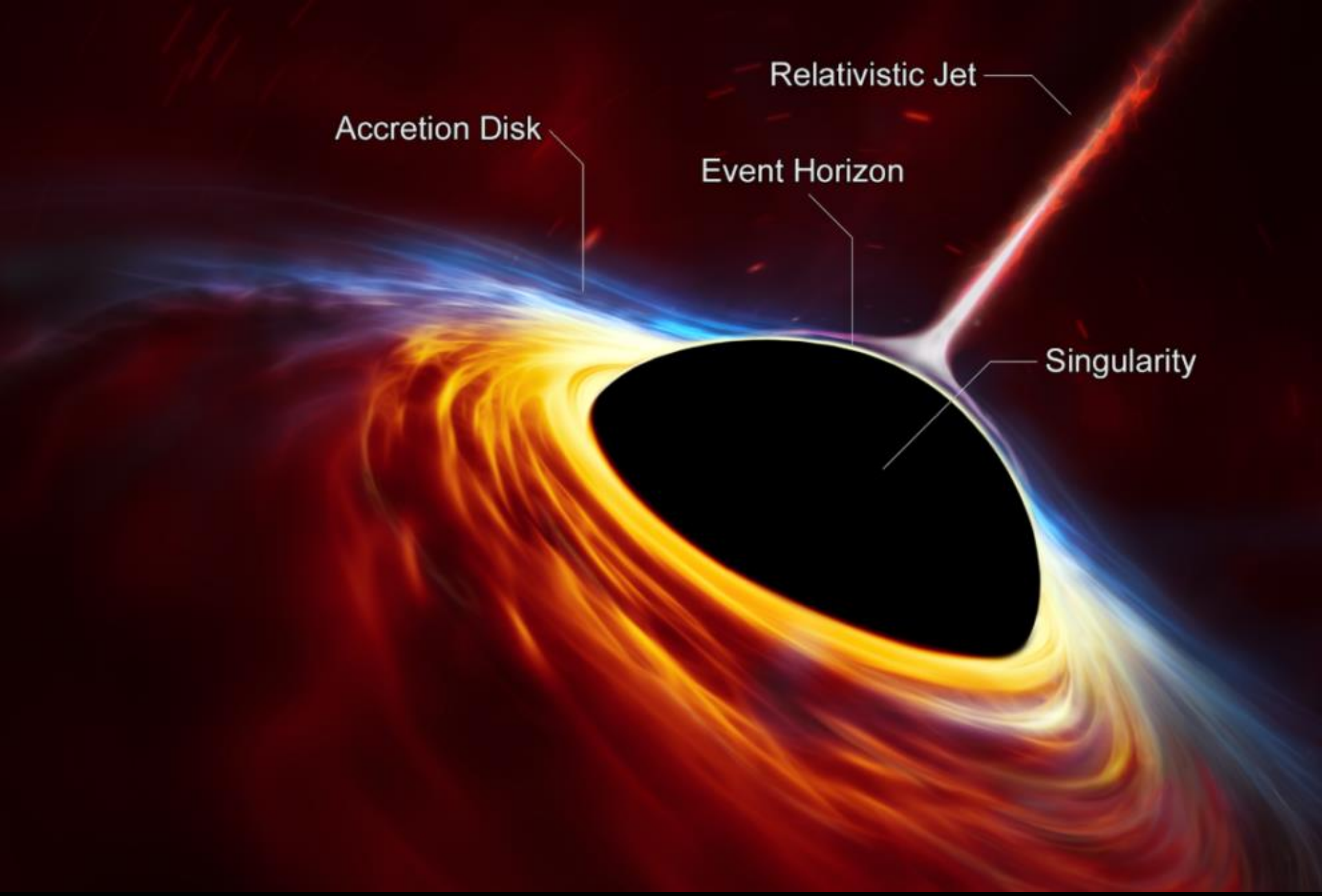
→ In der Ergosphäre starr mitrotierende Beobachter werden als **Bardeen-Beobachter** bezeichnet. Sie selbst besitzen keinen Drehimpuls, da ihre Relativgeschwindigkeit zur mitrotierenden Raumzeit Null ist.

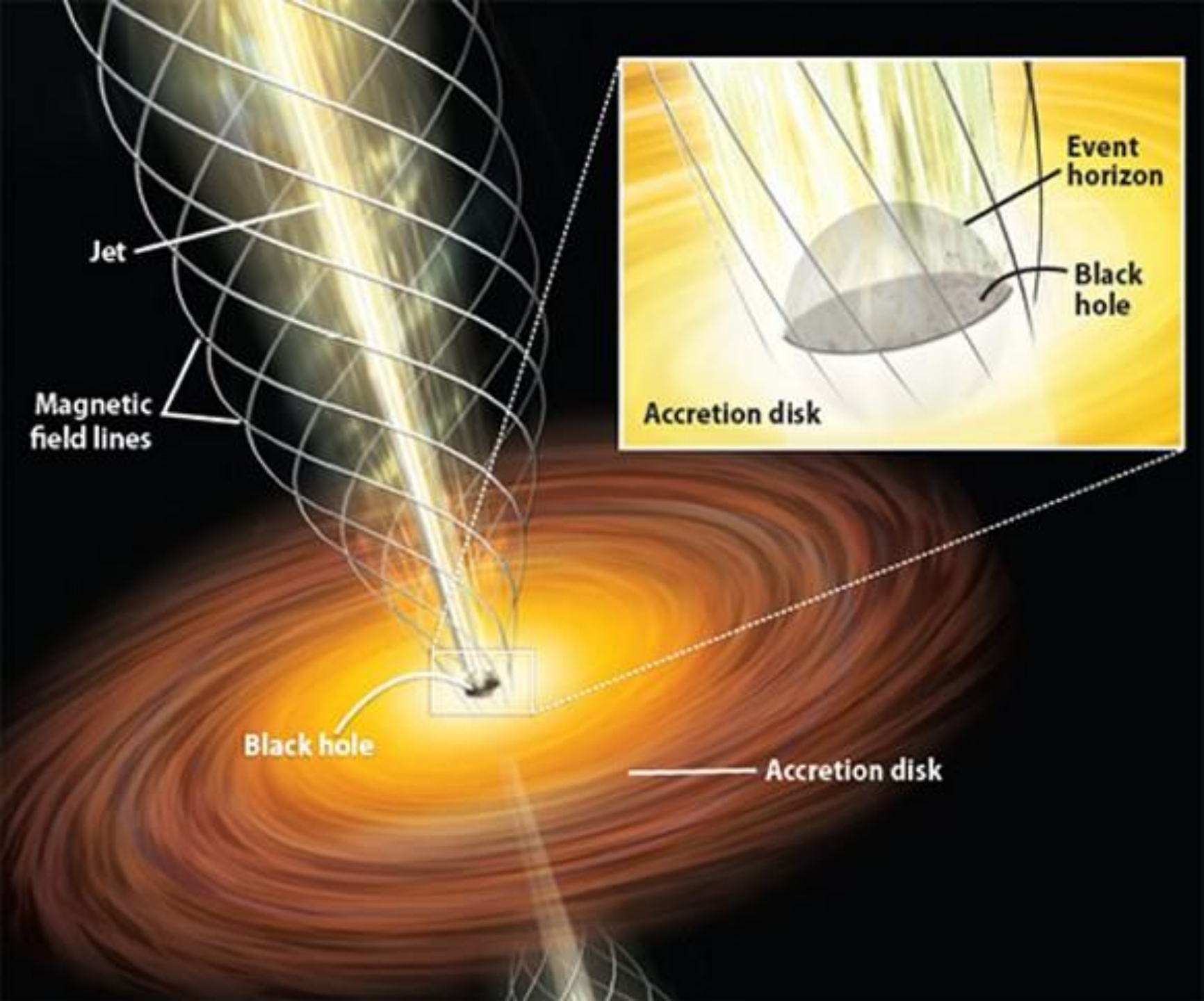
Massenakkretion und Kerr-Loch

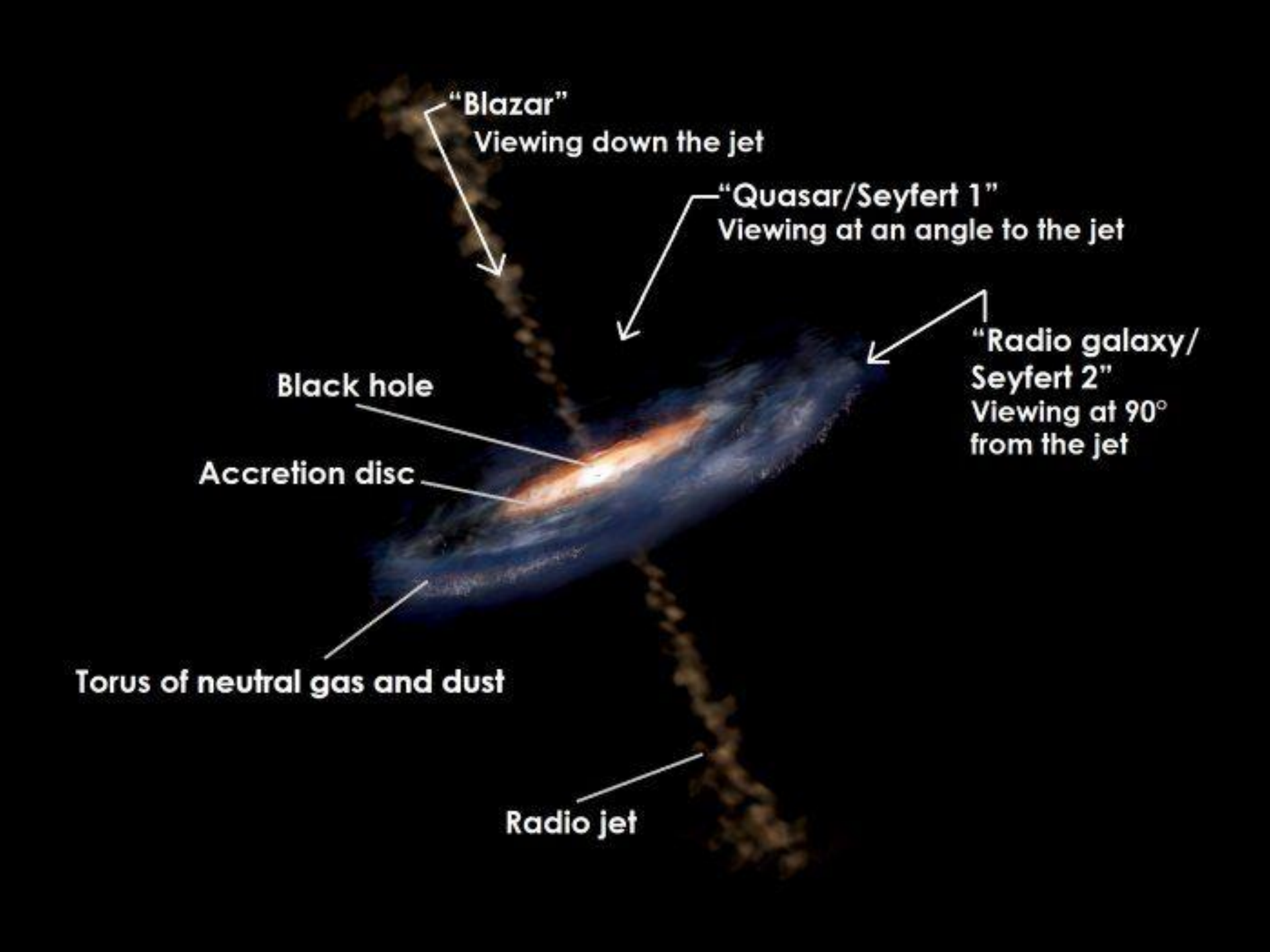


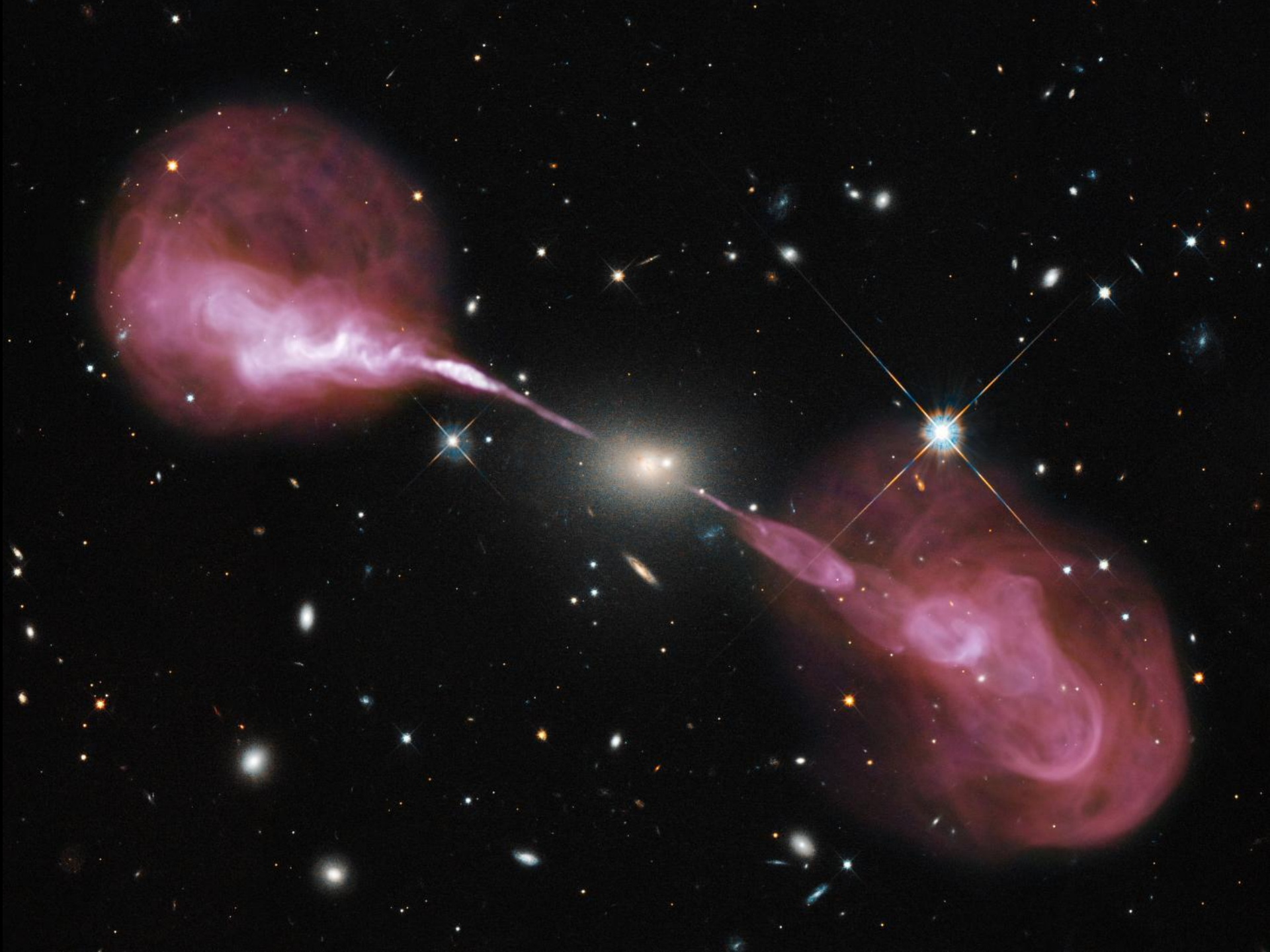
Radial einfallende Materie wird zum Mitrotieren gezwungen, wodurch sich die Zeit bis zum Erreichen des Ereignishorizonts vergrößert (Eigenzeit des Materieteilchens)

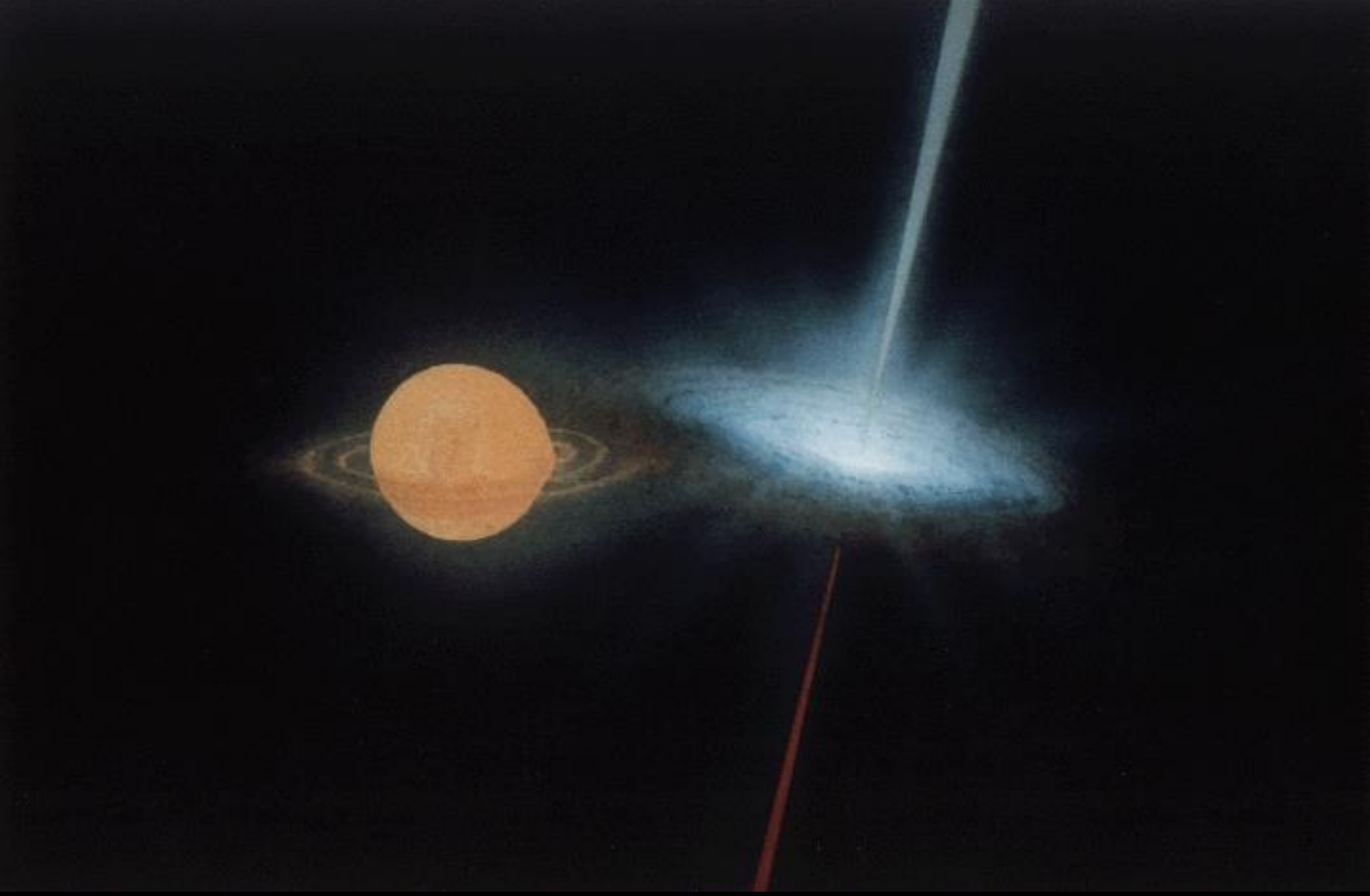
→ Materie konzentriert sich und kann sich dadurch stärker erhitzen …. (Quasar-Leuchtkraft)


Relativistic Jet
Accretion Disk
Event Horizon
Singularity

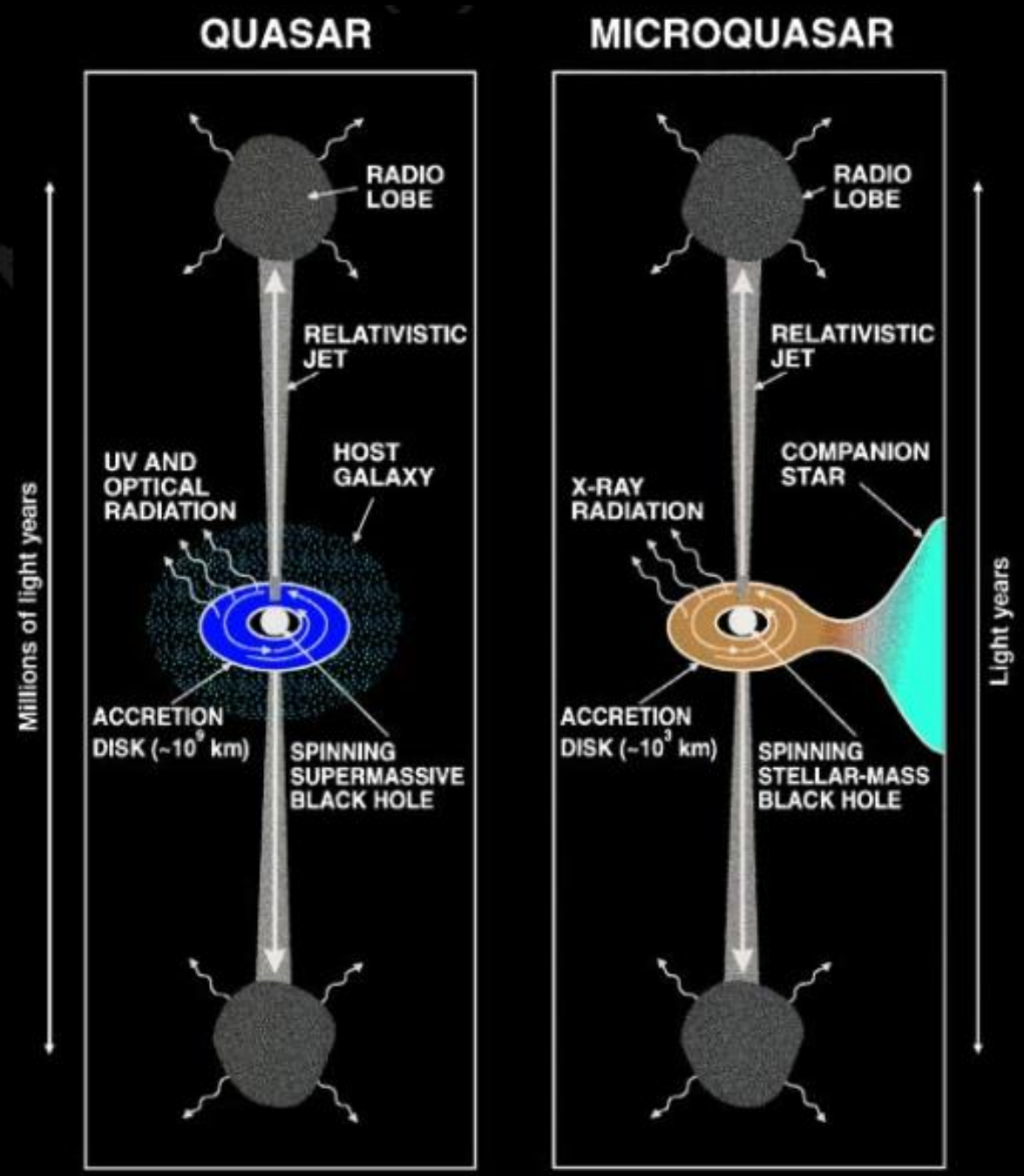

Jet
Magnetic field lines
Black hole
Accretion disk
Event horizon
Black hole
Accretion disk


"Blazar"
Viewing down the jet
"Quasar/Seyfert 1"
Viewing at an angle to the jet
"Radio galaxy/
Seyfert 2"
Viewing at 90°
from the jet
Black hole
Accretion disc
Torus of neutral gas and dust
Radio jet





Mikroquasar



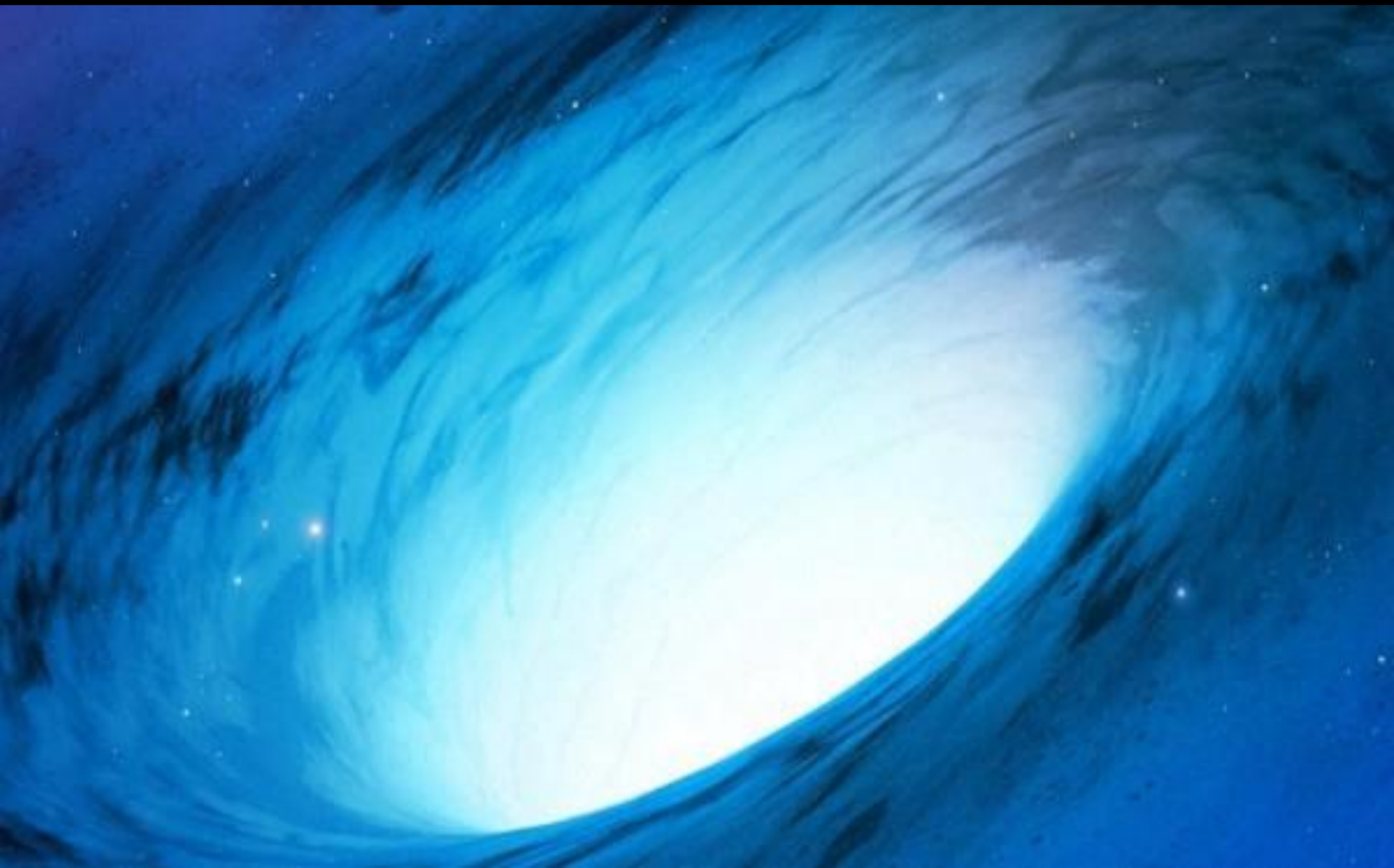
Mikroquasar

Quasar

Bahnen von Sternen um das zentrale galaktische Black hole (Sagittarius A)

Animation: Fall in ein das Black hole im Milchstraßenzentrum

Weiße Löcher



Beginnen wir mit einem Resümee…

Weiße Löcher sind hypothetische Objekte die theoretisch existieren können, für deren reale Existenz es aber keinerlei Hinweise gibt.

Das theoretische Konstrukt eines „**Weißen Lochs**“ ist die mathematische Konsequenz aus der Tatsache, dass die Einsteinschen Feldgleichungen zeitsymmetrisch sind.

→ Kehrt man in einer Lösung (z. B. Schwarzschild-Lösung) die Zeitrichtung um, dann erhält man wieder eine reguläre Lösung der Feldgleichungen

Interpretation:

- Aus einem Weißen Loch kann Materie nur herausfließen
- Der Ereignishorizont kann nur von innen nach außen überwunden werden
- Nichts kann von außen in ein Weißes Loch gelangen. Der Ereignishorizont stellt eine unüberwindliche Grenze für einfallende Materie dar

Beginnen wir mit einem Resümee…

Weiße Löcher sind hypothetische Objekte die theoretisch existieren können, für deren reale Existenz es aber keinerlei Hinweise gibt.

Das theoretische Konstrukt eines „**Weißen Lochs**“ ist die mathematische Konsequenz aus der Tatsache, dass die Einsteinschen Feldgleichungen zeitsymmetrisch sind.

→ Kehrt man in einer Lösung (z. B. Schwarzschild-Lösung) die Zeitrichtung um, dann erhält man wieder eine reguläre Lösung der Feldgleichungen

Interpretation:

- Aus einem Weißen Loch kann Materie nur herausfließen
- Der Ereignishorizont kann nur von innen nach außen überwunden werden
- Nichts kann von außen in ein Weißes Loch gelangen. Der Ereignishorizont stellt eine unüberwindliche Grenze für einfallende Materie dar

Das Konzept der „Weißen Löcher“ wurde 1964 von Igor Nowikov eingeführt

„Weiße Löcher“ sind zwar genauso wie die „Tachyonen“ mit der Allgemeinen Relativitätstheorie konsistent – sie müssen aber deshalb noch lange nicht wirklich existieren:

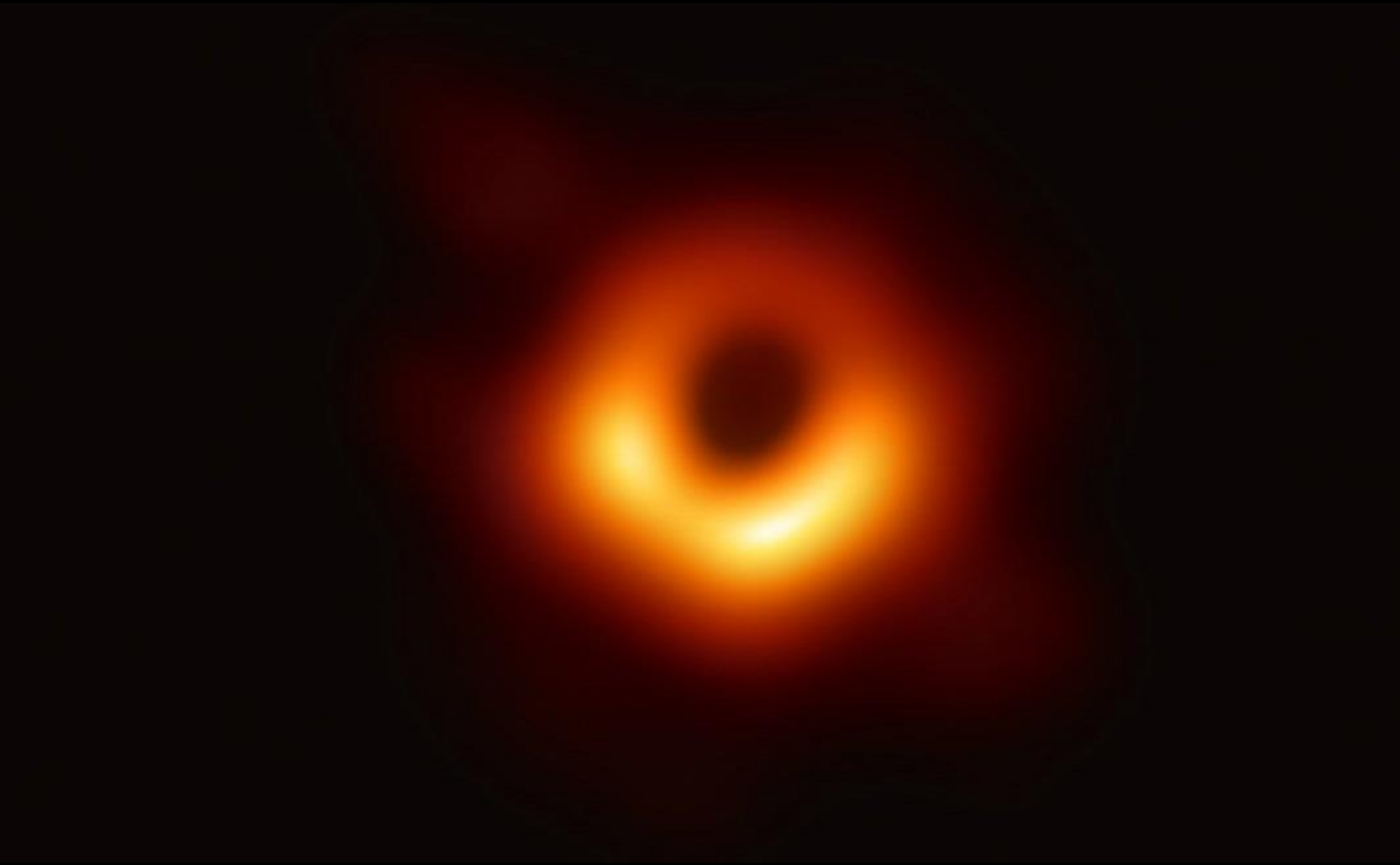
- Es gibt keinen vernünftig denkbaren Mechanismus für ihre Entstehung
- Thermodynamisch widersprechen sie dem Entropiesatz (II. Hauptsatz)
- Es gibt keine kosmischen Objekte, die sich (allein) als „Weißes Loch“ interpretieren lassen

Spekulation: Könnte der „Urknall“ ein „Weißes Loch“ sein?

Vereinigt man eine Black hole – Lösung mit einer White hole – Lösung, dann erhält man das Konzepte eines …

Weiße Löcher und Kollision von Schwarzen mit Weißen Löchern

Black hole im Bild



Frage: Ist es möglich, ein „Schwarzes Loch“ zu sehen?

Ein einzelnes Schwarzes Loch „absorbiert“ jede Art von Strahlung absolut. Deshalb kann man es auch nicht „sehen“

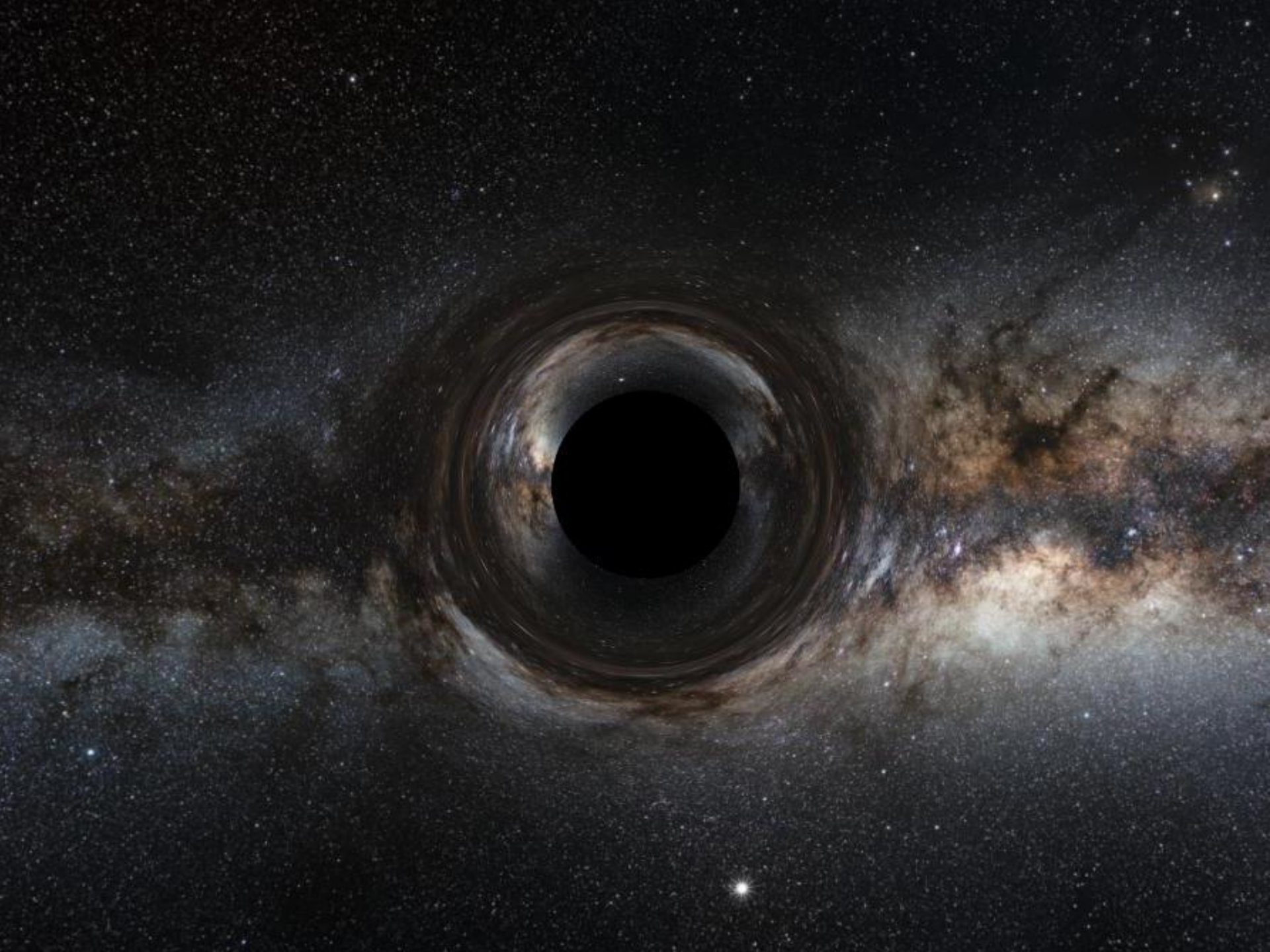
Wenn jedoch der „Hintergrund“ strahlt („Sternfeld“, leuchtendes Gas), so verzerrt ein Schwarzes Loch deren Lichtstrahlen

→ Gravitationslinseneffekt
→ optische Verzerrung des „Hintergrundes“

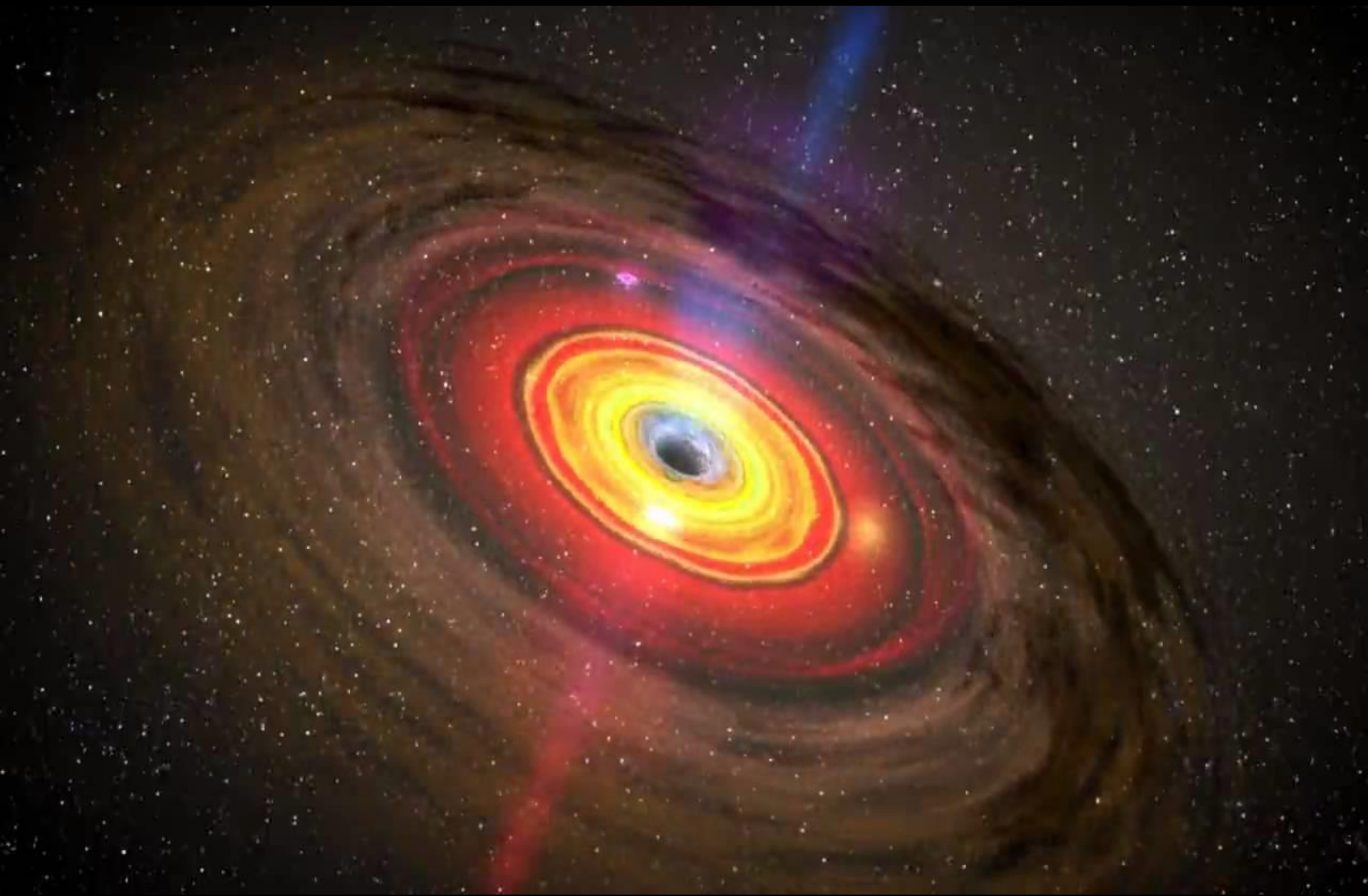
Ist das Schwarze Loch von einer hell leuchtenden Akkretionsscheibe umgeben, dann wird der Teil des Black holes als „Schatten“ darauf sichtbar, wo die Gravitationsrotverschiebung divergiert, d. h. kurz vor dessen Gravitationsradius.

→ Aussehen dieses „Schattens“ lässt sich am Computer mittels „ray tracing“ simulieren

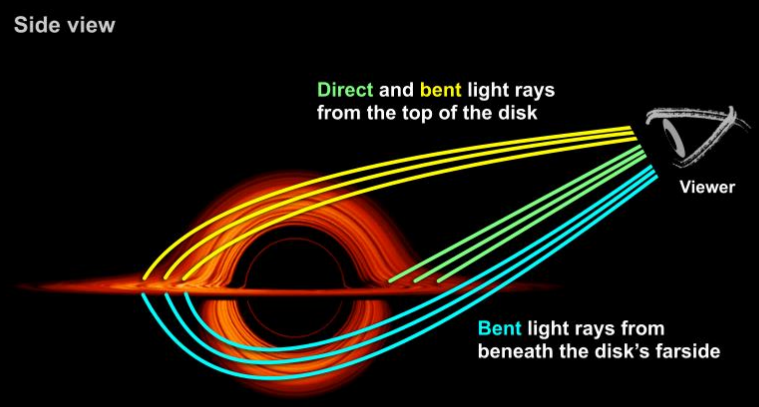
→ Wenn es gelingt, den Bereich um den Ereignishorizonts eines von einer Akkretionsscheibe umgebenden Schwarzen Lochs optisch aufzulösen, dann sollte dieser „Schatten“ sichtbar werden

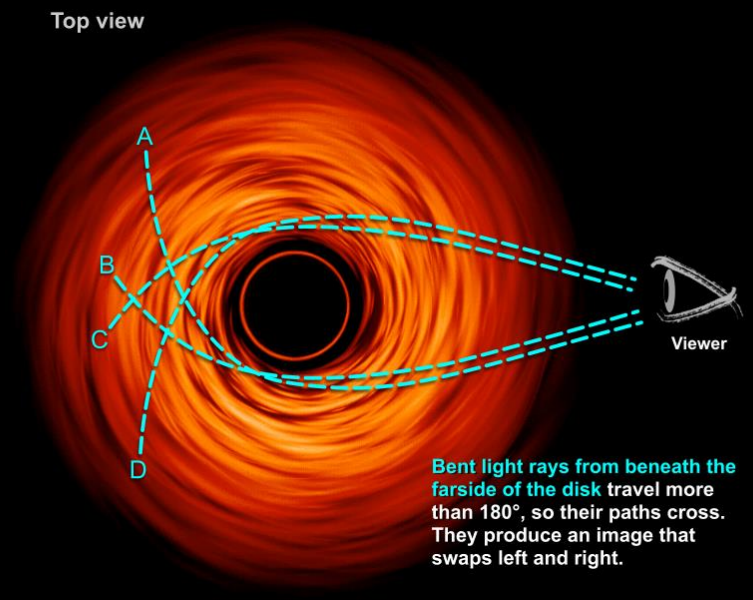


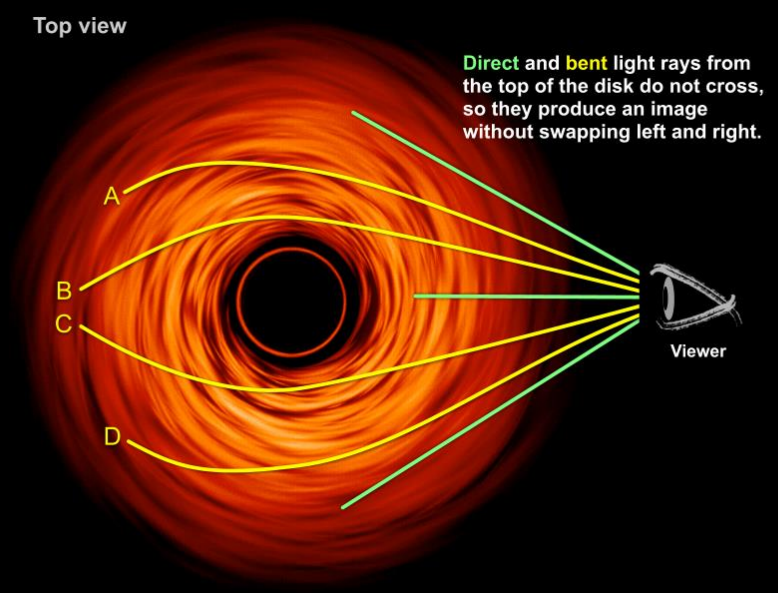
Alle aktiven Galaxien besitzen in ihrem Kern ein Black hole mit einer Akkretionsscheibe

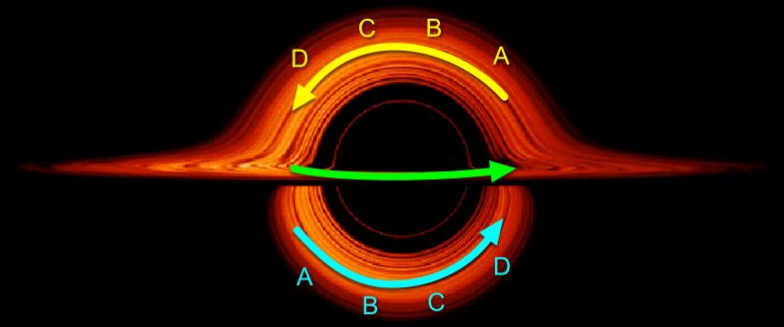


Wie sieht ein „Black hole – Schatten“ auf einer Akkretionsscheibe aus?



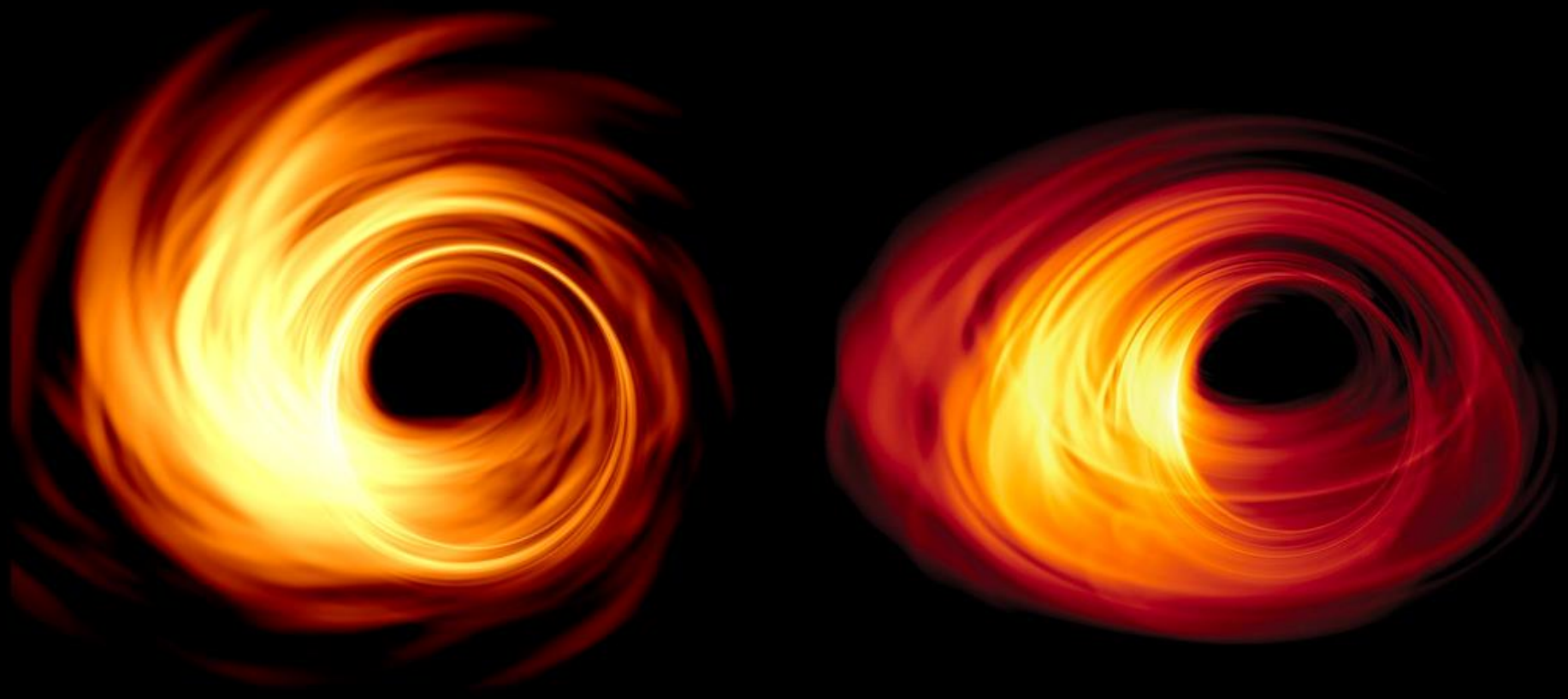






Apparent image and disk motion

Simulation des Aussehens der unmittelbaren Umgebung des Black holes im Zentrum der Milchstraße



Aussehen hängt u. a. vom Blickwinkel ab
Lage der Akkretionsscheibe lässt sich durch die Richtung der Jets bestimmen

Frage: Wie „groß“ (im Winkelmaß) ist der Ereignishorizont in verschiedenen, nicht zu weit entfernten Galaxien (einschließlich der Milchstraße) ?

Wie groß muss ein „Teleskop“ sein, um ein Objekt von der Größe des Ereignishorizonts eines Supermassiven Black holes in einer Nachbargalaxie (einschließlich der Milchstraße) aufzulösen?

Objekt	Entfernung (Lj)	Masse (Sonnenmassen)	Radius (km)	Radius (AU)	Winkel-Ø (“)
Sgr A*	27.000	4,3 Millionen	12.70000	0.008	0,0000053
M 31	2,45 Mill.	40 Millionen	120 Mill.	0.8	0,0000022
M 87	54 Mill.	3,5 Milliarden	10,4 Milliarden	70	0,0000044
NGC 1277	230 Mill.	5 Milliarden	15 Milliarden	100	0,000003
TON 618	10,3 Milliarden	66 Milliarden	200 Miliarden	134	0,0000008

Erdbahn: 1 AU Jupiterbahn: 5,9 AU Uranusbahn: 20 AU Plutobahn: 35 AU

Wie groß muss ein Teleskop sein, um das Black hole im Zentrum der Milchstraße aufzulösen?

Auflösungsvermögen Hubble-Teleskop: 0,04 “
Auflösungsvermögen VLT-Interferometer: 0,002 “

Größe Zentral-Black hole der Milchstraße: 0,0000053 “ (53 Mikrobogensekunden)

→ optisches Teleskop mit einer Öffnung von ca. 30 Meter

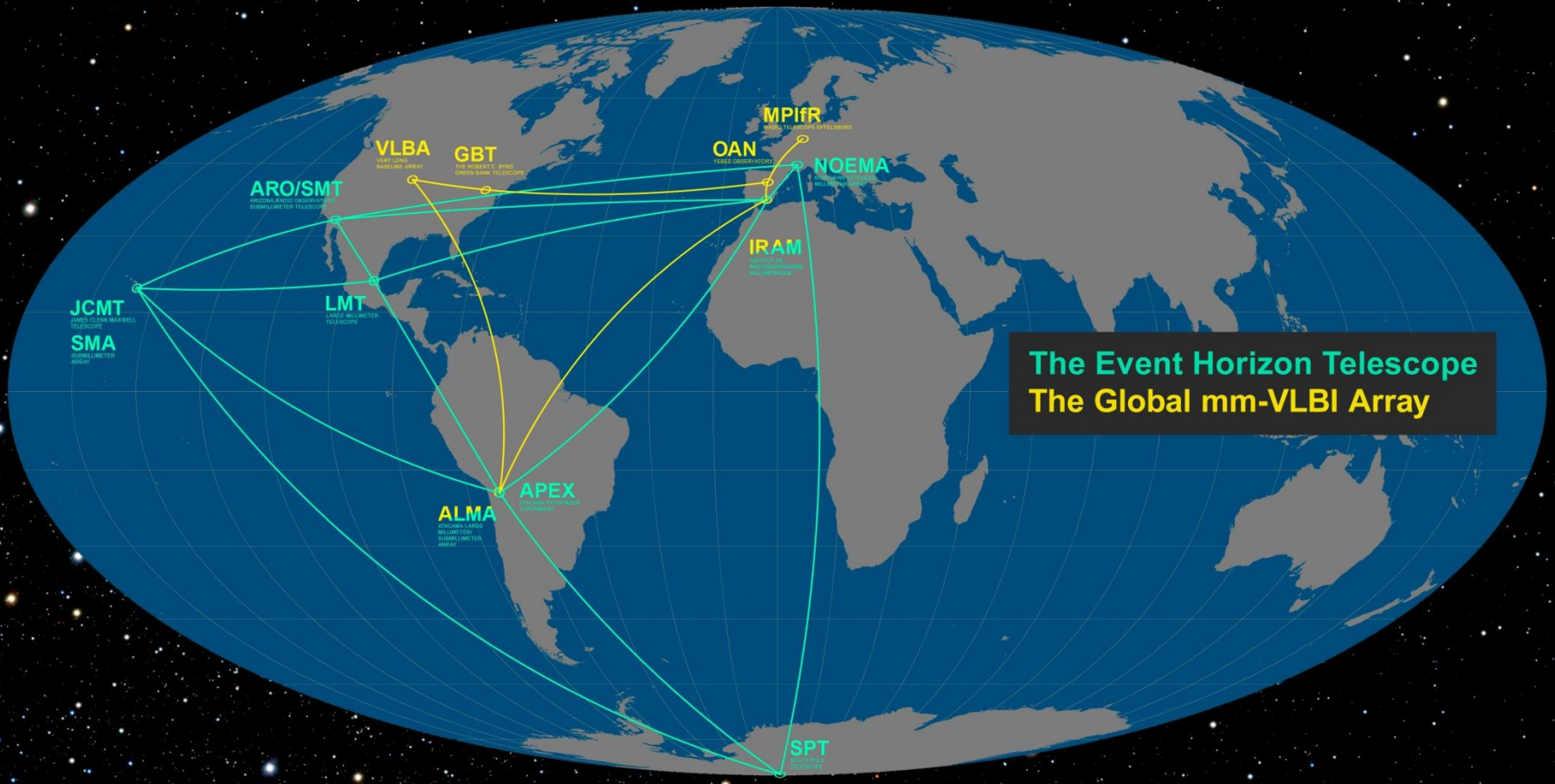
Gegenwärtig liegt die Auflösung eines galaktischen supermassereichen Black hole außerhalb aller technischen Möglichkeiten

Alternative: Verwendung von Millimeterwellen-Radioteleskopen, die über den gesamten Globus verteilt sind und interferometrisch arbeiten

↓

Event Horizon Telescope

Observing the supermassive black hole at the heart of the Milky Way



Event Horizon Telescope

Simulation eines kontinentgroßen Millimeterwellen-Teleskops durch Zusammenschaltung vieler derartiger, über den Globus verteilter Teleskope

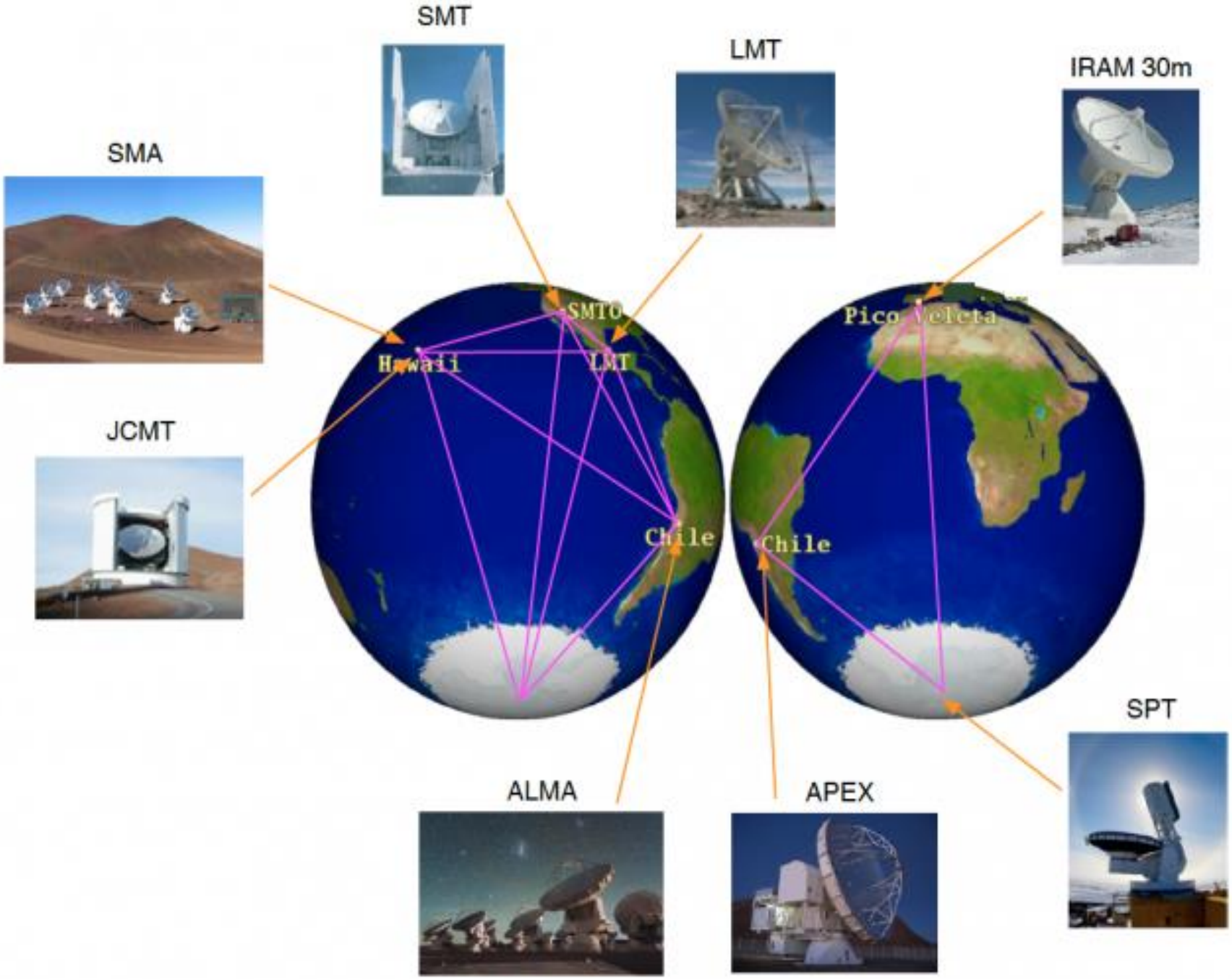
→ **Problem:** Damit das Array als EIN TELESKOP fungieren kann, müssen alle Einzelteleskope PHASENGLEICH zusammengefügt werden.

Lösung: Jedes Teleskop beobachtet separat, aber die aufgenommene Signalfolgen werden mit den Zeitmarken einer global synchronisierten Atomuhr versehen

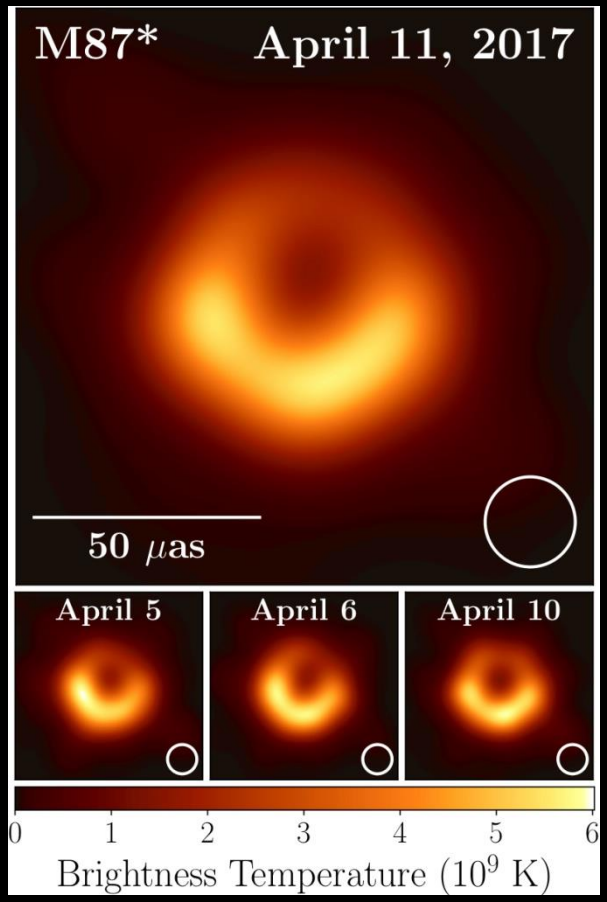
Später werden die Signalfolgen aller Teleskope phasensynchron im Computer zusammengeführt und (extrem aufwändig) zu einem Einzelbild verrechnet, welches die Intensitätsverteilung der Millimeterwellenstrahlung um das Black hole herum zeigt. (Genauigkeit der Synchronisation besser als ein millionstel Sekunde)

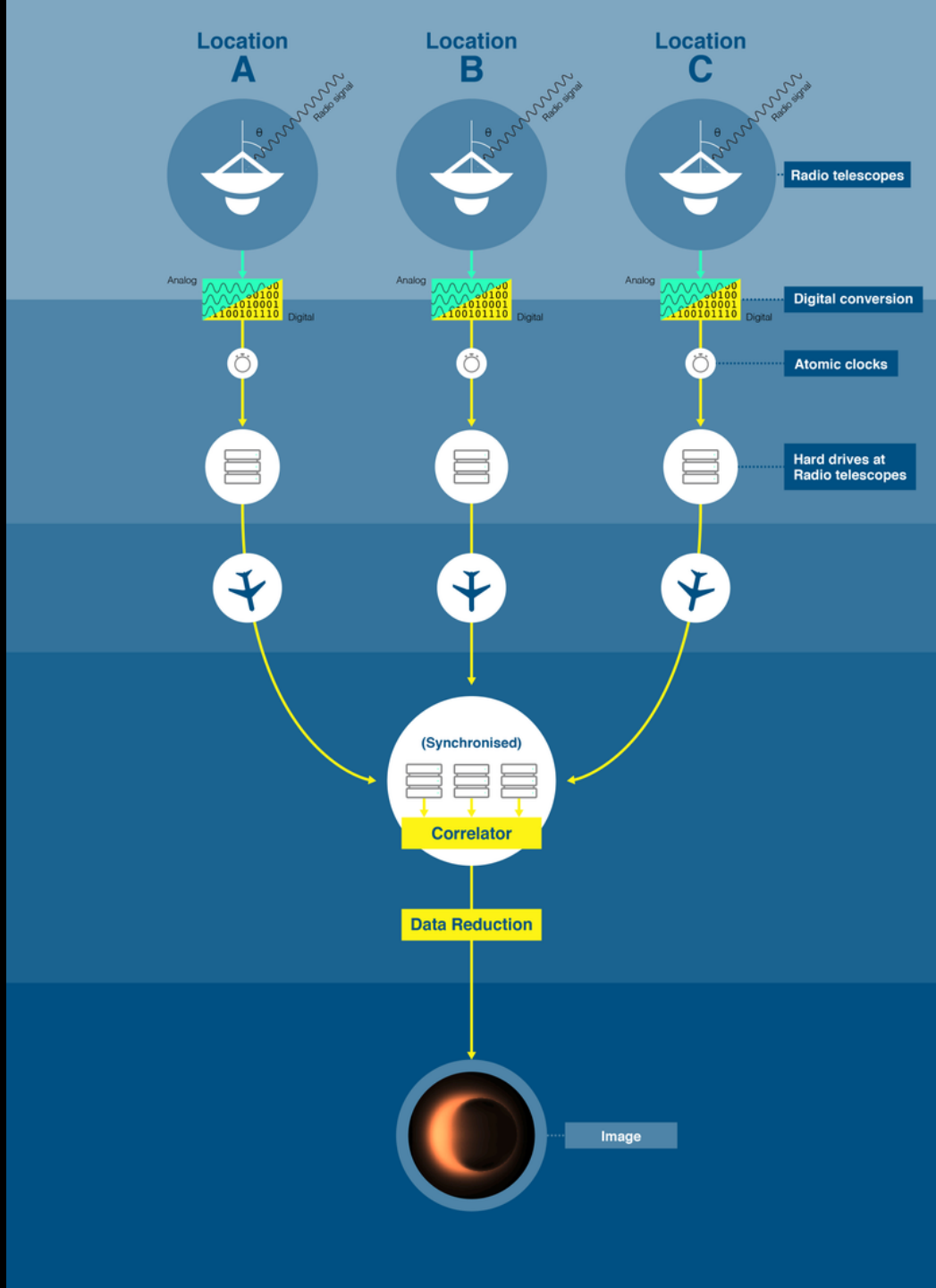
Beobachtungswellenlänge: 1,3 mm (230,6 GHz)

(Bei dieser Wellenlänge ist die Erdatmosphäre hoch transparent)

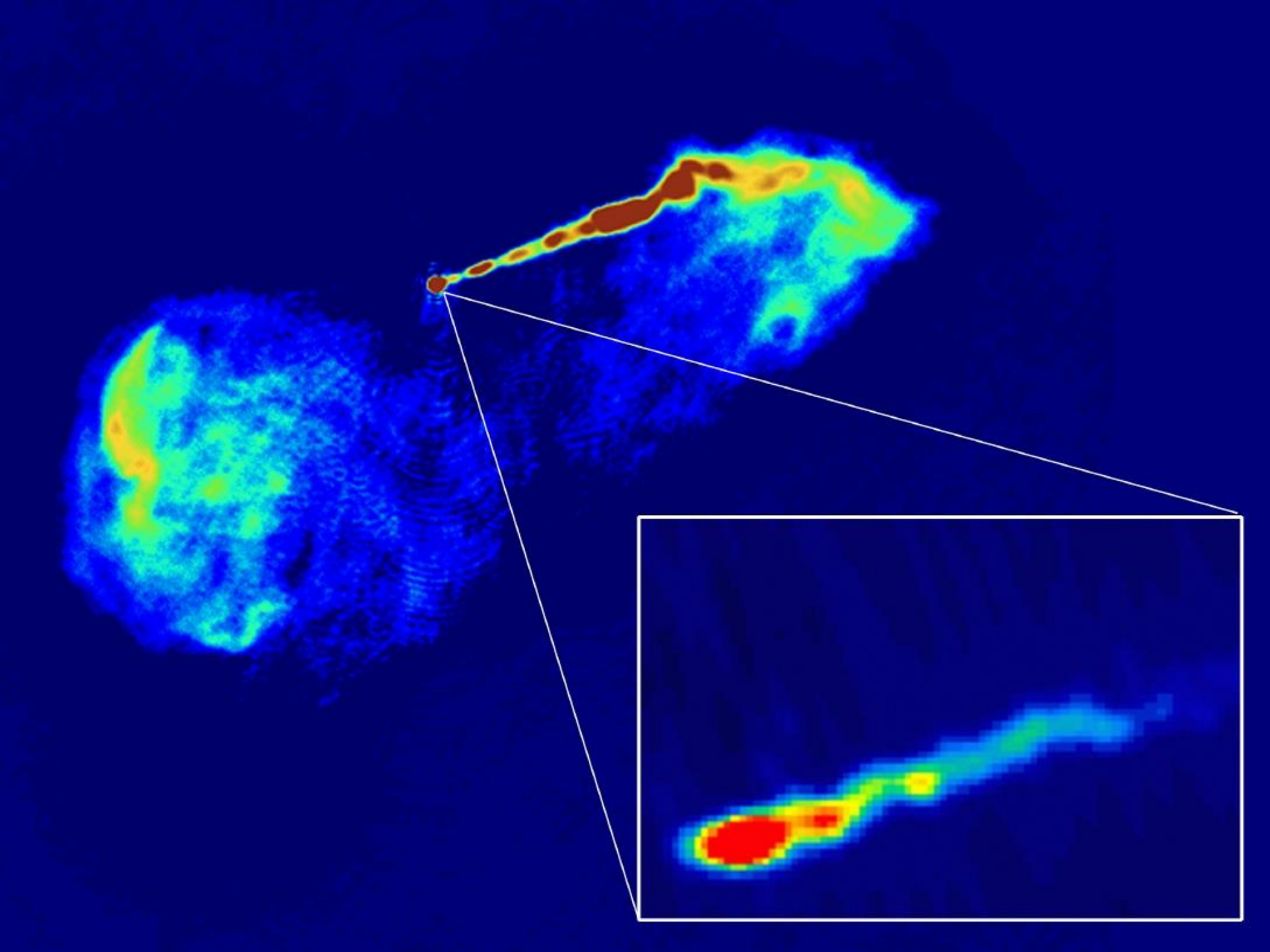

SMT
LMT
IRAM 30m
SMA
JCMT
SMTO
Hawaii
LMT
Chile
Pico Veleta
Chile
SPT
ALMA
APEX

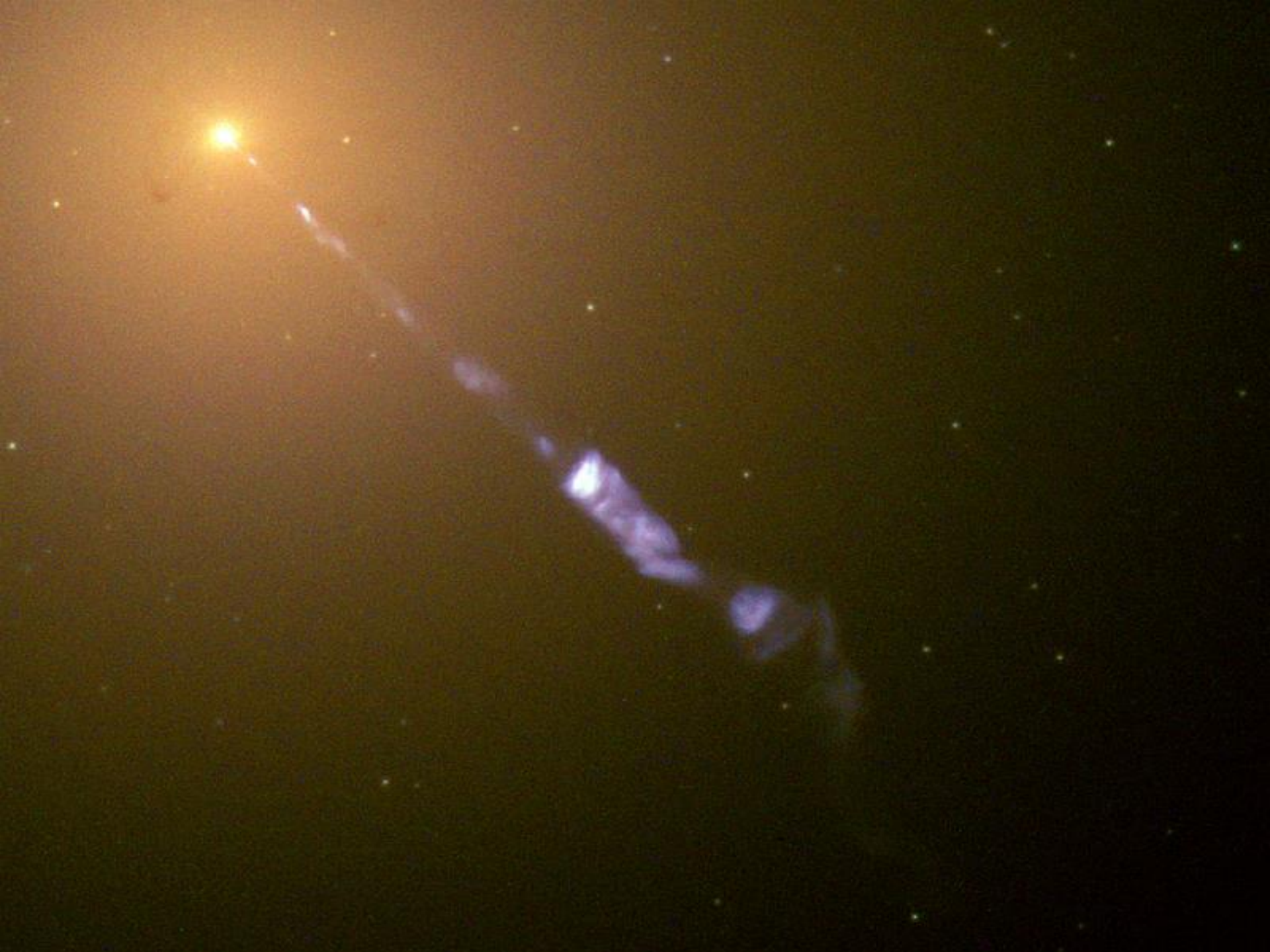
Die Erstellung eines „Bildes“ erfordert die Rechenleistung eines Super-Computers und dauert aufgrund der riesigen Menge an Ausgangsdaten mehrere Monate

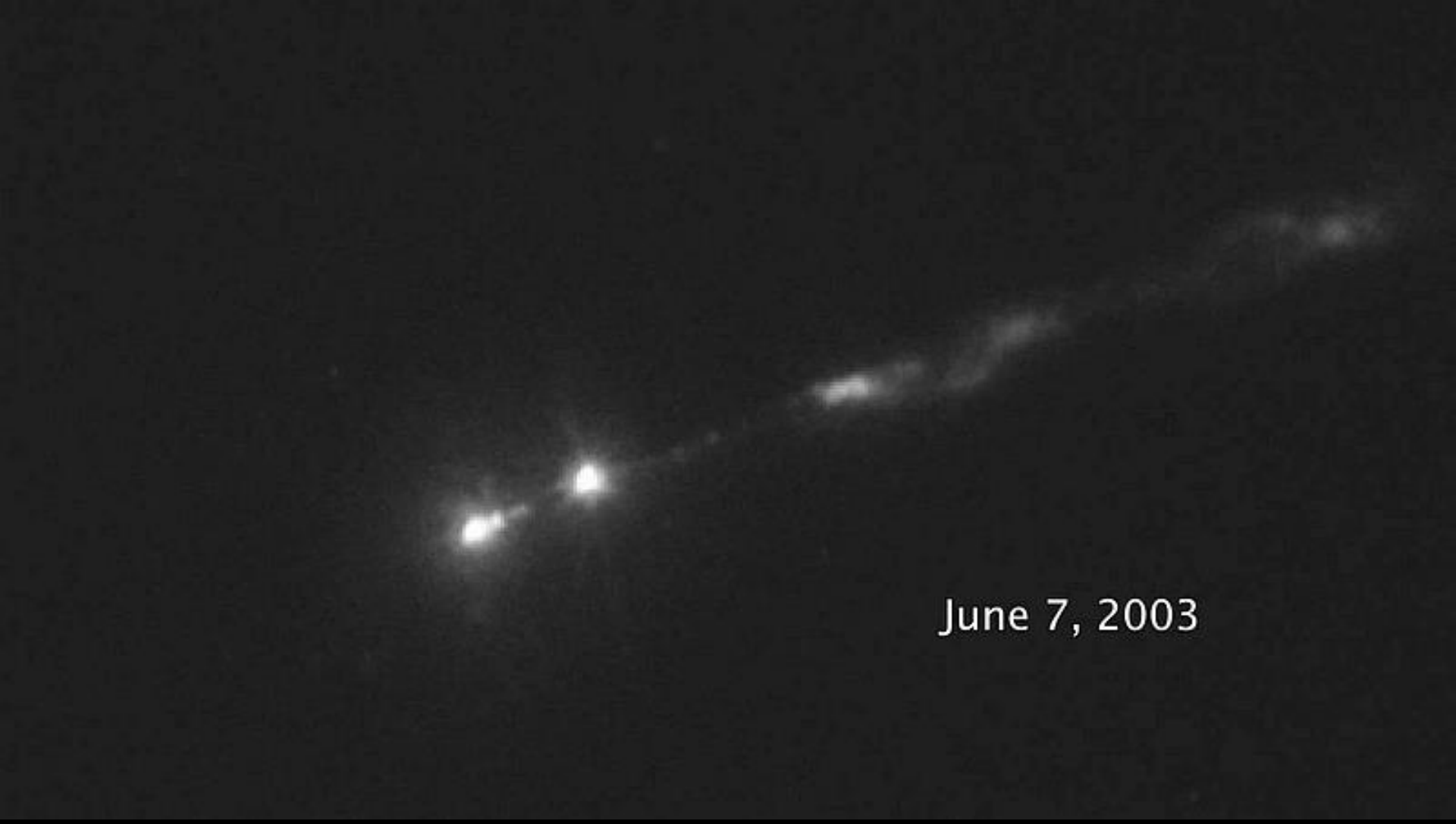




Beispiel M 87 = Virgo A

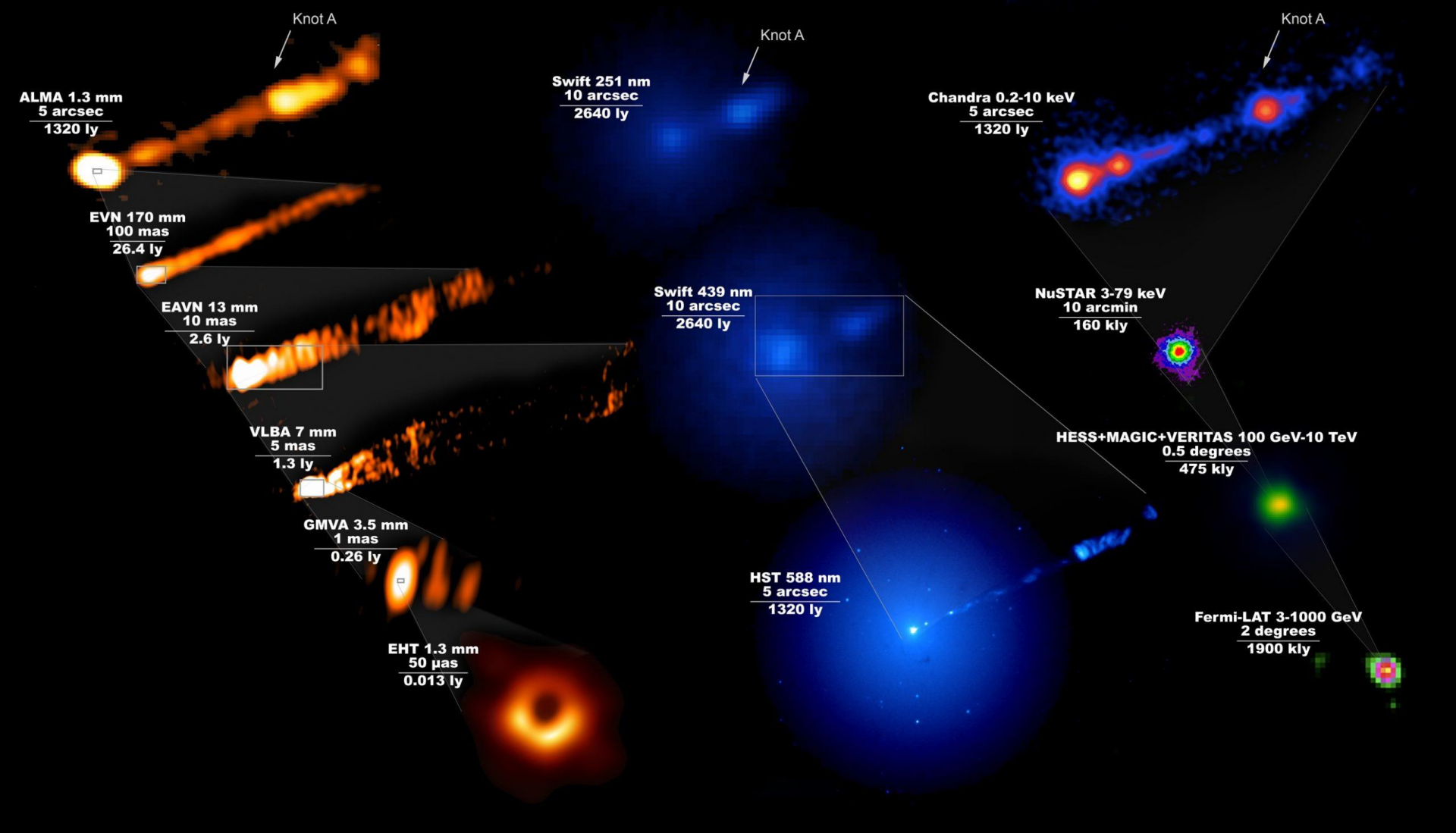




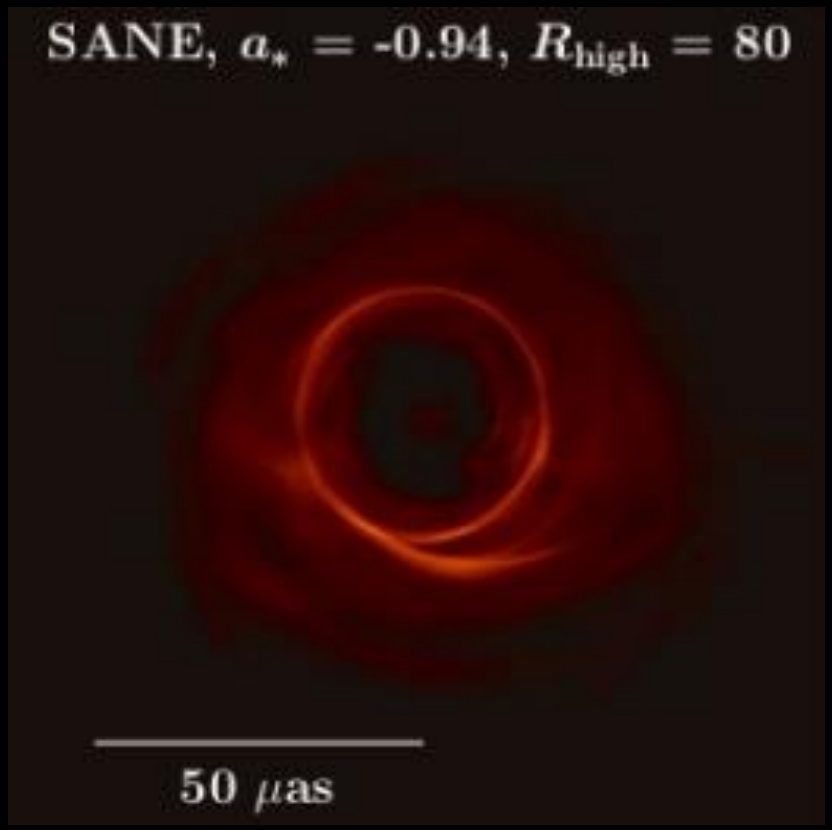


Zentral-Black hole M 87: 6,5 Milliarden Sonnenmassen
aktive Jets (relativ hohe Akkretionsrate)
Durchmesser Ereignishorizont: 44 Mikrobogensekunden
(Schwarzschild-Fall)

Multispektrale Beobachtungen des Kerns von M 87



Simulation der Akkretionsscheibe um das zentrale Black hole von M 87



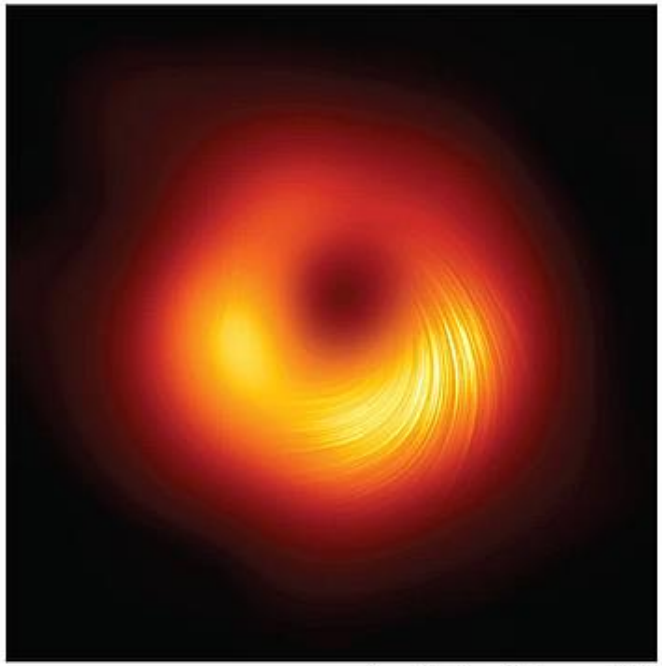
Simulation

Ansicht nach Aperturfaltung

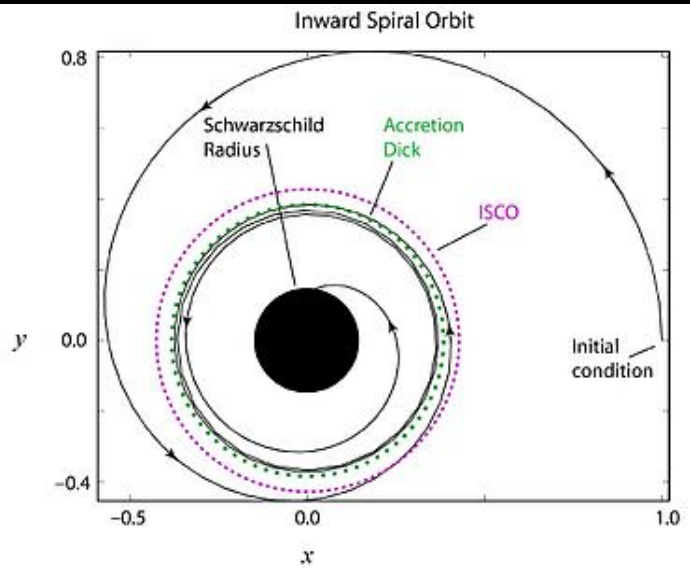
Bild der zentralen Akkretionsscheibe

Das Bild des Schattens und der Akkretionsscheibe entsteht durch eine Kombination aus Lichtbeugung und Photoneneinfang am Ereignishorizont

- Entspricht 40 Mikrobogensekunden für M87 (Kerr-Fall)
- Die Größenskala des Emissionsrings wird durch den Photoneneinfangsradius festgelegt, der etwa um den Faktor 2,5 mal größer ist als der Schwarzschildradius

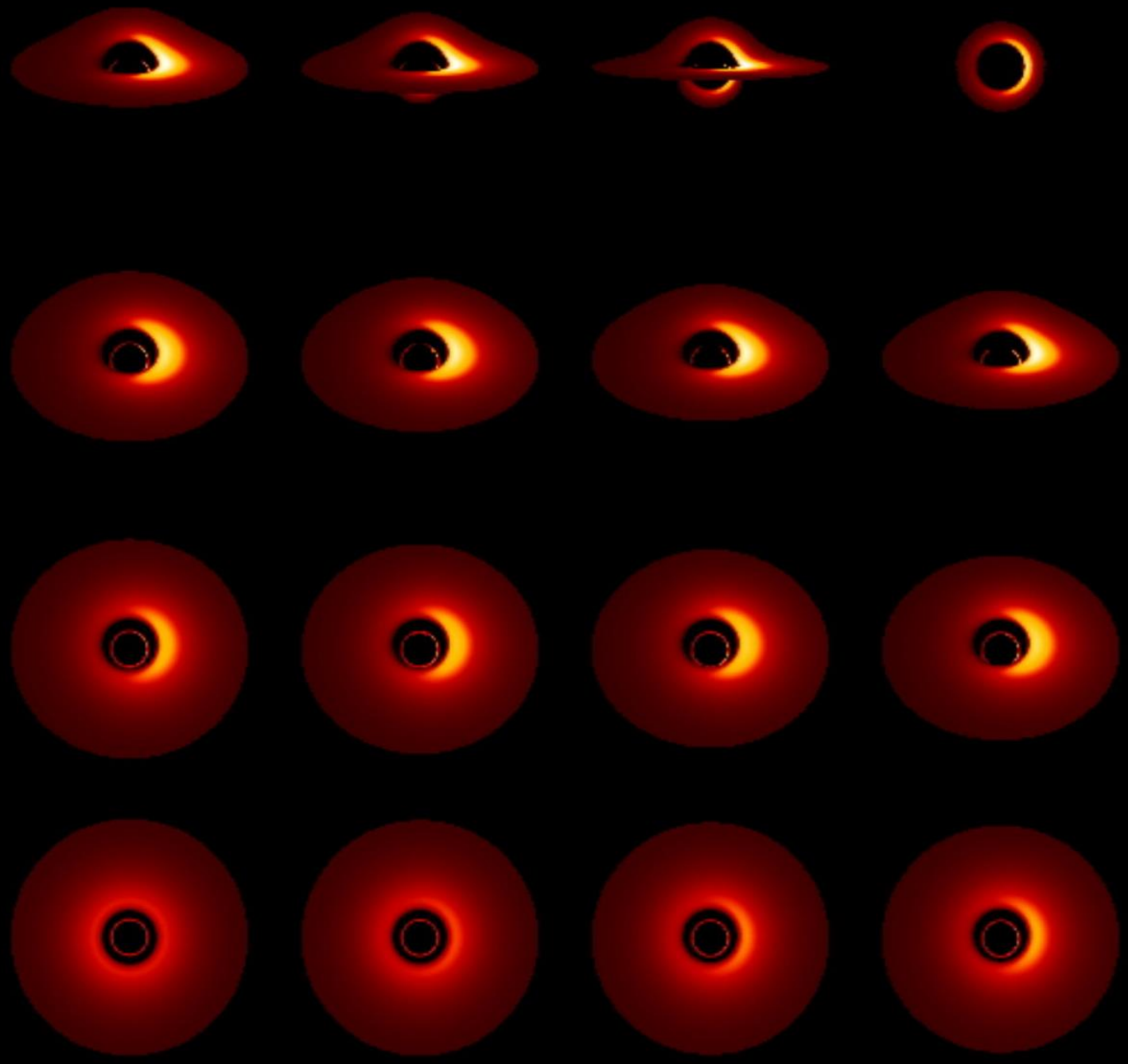


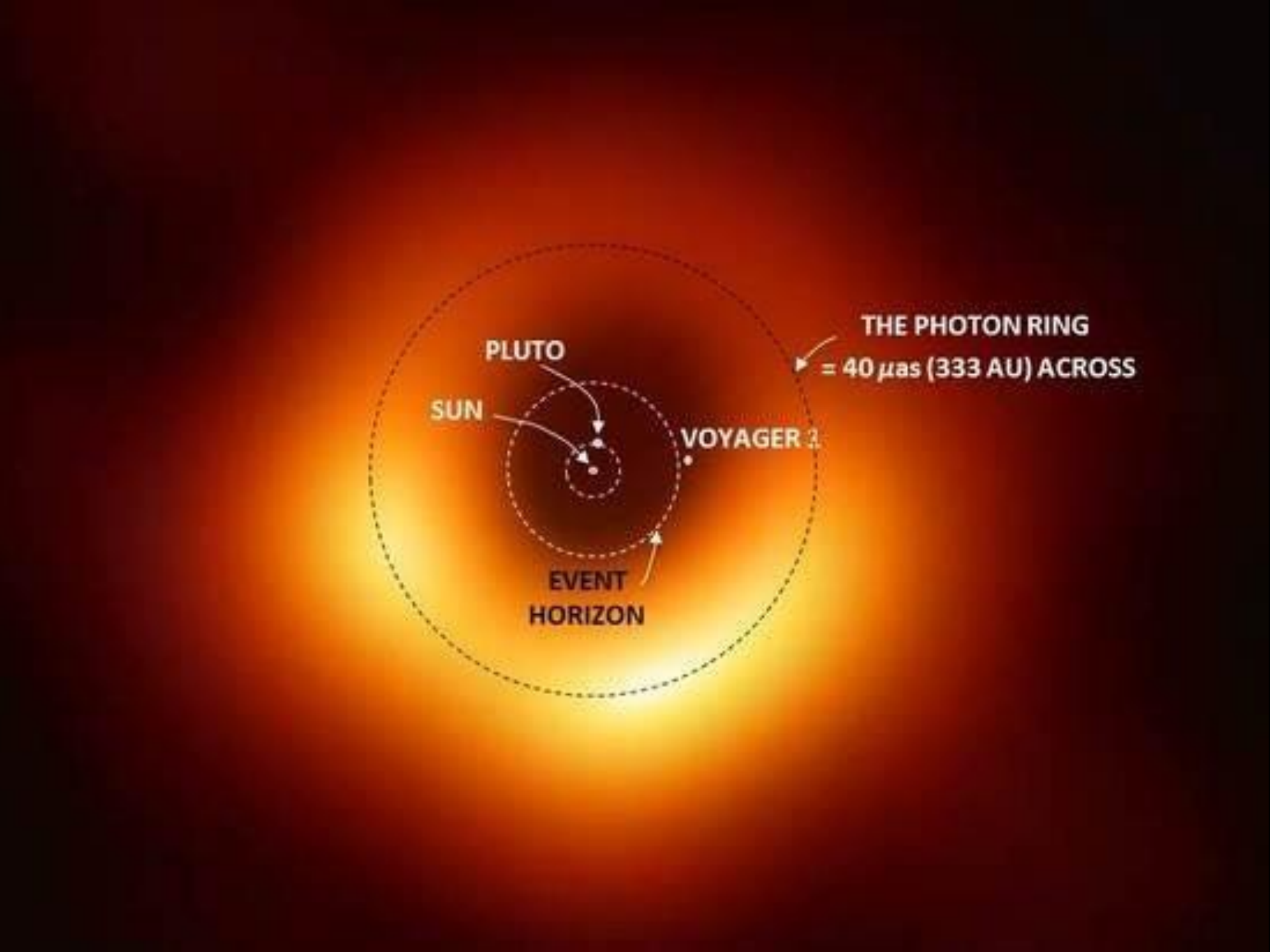
Event Horizon Telescope M87

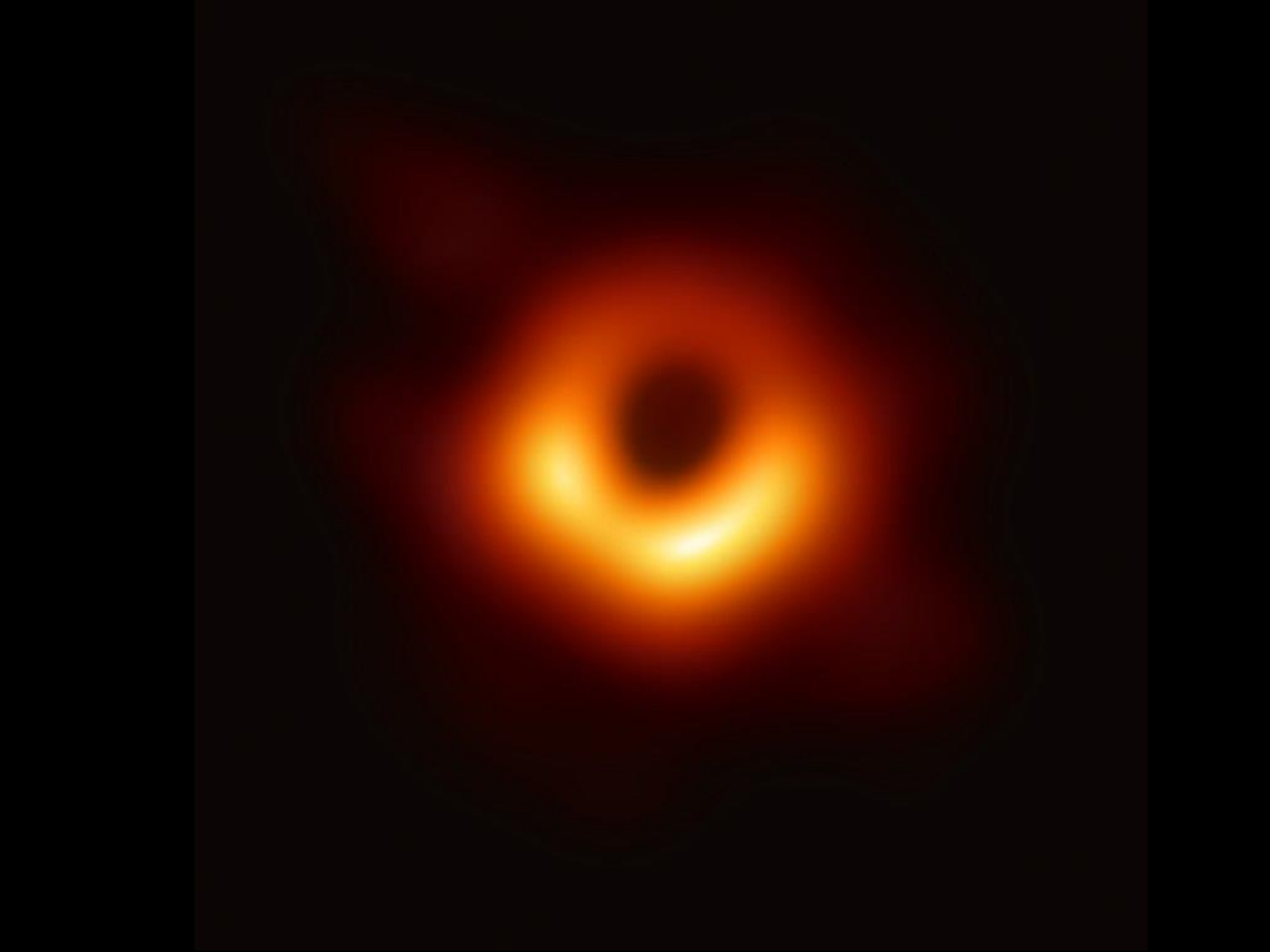
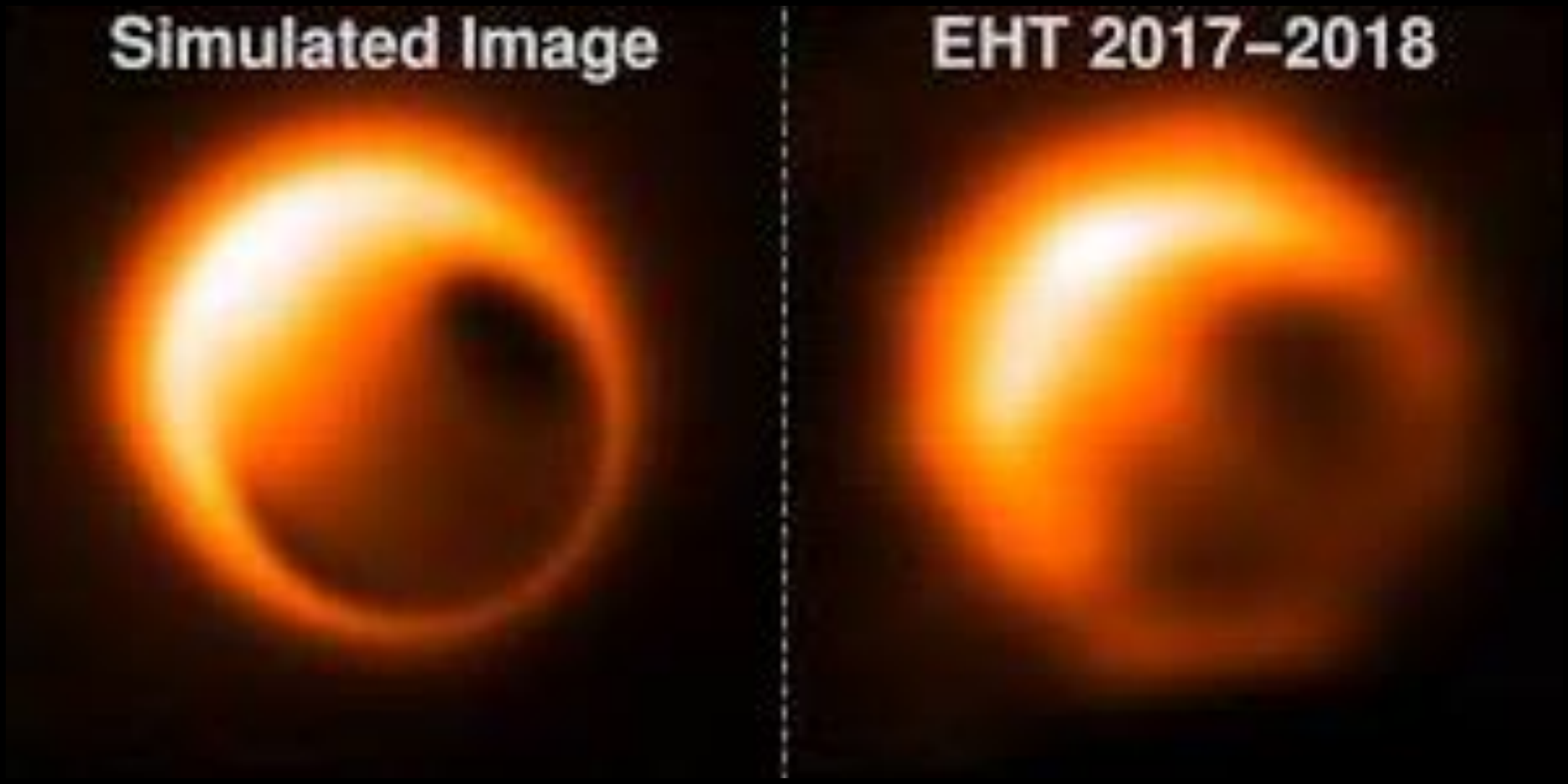


$$\Phi_{eff}(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} - \frac{R_S}{2}\frac{l^2}{mr^3}$$

Verschiedene
Blickrichtungen




THE PHOTON RING
= 40 μas (333 AU) ACROSS
PLUTO
SUN
VOYAGER 1
EVENT
HORIZON



Black hole Sgr A*